Современная математика. Фундаментальные направления. Том 21 (2007). С. 5–36

УДК 517.956.4

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

© 2007 г. **Е. М. ВАРФОЛОМЕЕВ**

СОДЕРЖАНИЕ

Аннотация. Для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с краевыми условиями Неймана, содержащего конечное число преобразований пространственных переменных, получены достаточные условия существования бифуркации Андронова—Хопфа периодических решений, а также разложение решений в ряд по малому параметру. Исследованы спектральные свойства линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора указанной задачи. Получены необходимые и достаточные условия нормальности таких операторов. Рассматриваются примеры, иллюстрирующие свойства исследуемых операторов.

1. Введение

Нелинейная оптическая система с преобразованиями поля в двумерной обратной связи описывается задачей Неймана для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованиями пространственных переменных [5, 23]. Возникающие в таких системах устойчивые световые явления могут быть использованы для оптических методов обработки и хранения информации. С точки зрения приложений в нелинейной оптике представляет интерес изучение бифуркации периодических решений указанного уравнения. Первые результаты такого рода были получены в работах [9, 20].

Во многих работах такая задача рассматривалась при наличии одного преобразования пространственных переменных. В работах [7, 9] изучалась одномерная модель на окружности, в которой преобразование пространственных переменных g являлось поворотом на некоторый угол. В работе [16] рассматривалась задача на отрезке, а преобразование g являлось отражением пространственной переменной относительно центра отрезка. В работе [20] было изучено существование бифуркационных решений в случае, когда пространственная область Q — круг, а преобразование g — поворот на некоторый угол. В работе [2] рассматривался случай, когда область Q — круг, а преобразование g является суперпозицией преобразований поворота и радиального сжатия. Случай произвольной области Q с гладкой границей и гладкого взаимно-однозначного преобразования g общего вида рассматривался в работах [12, 21] в предположении, что линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор задачи — нормальный. В работе [13] были получены необходимые и достаточные условия нормальности таких операторов. В работах [1, 14] без предположения нормальности линеаризованного оператора была рассмотрена задача для произвольной области Q с гладкой границей и гладкого взаимно-однозначного преобразования g общего

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00256.

вида. В работе [10] был изучен случай, когда Q — произвольная область с гладкой границей, а преобразование g задано в обобщенном виде с помощью некоторого функционала и, вообще говоря, не является обратимым.

При наличии двух гладких взаимно-однозначных преобразований пространственных переменных общего вида в работах [3, 4, 22] были получены необходимые и достаточные условия нормальности линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора задачи. Аналогично результатам работы [13] было доказано, что при некоторых условиях такой оператор нормален тогда и только тогда, когда преобразования переменных являются аффинными с ортогональными матрицами. Для этого оказалось необходимым рассмотреть различные варианты взаимодействия двух преобразований пространственных переменных.

В настоящей работе получены достаточные условия существования бифуркации Андронова—Хопфа периодических решений квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения при наличии конечного числа гладких взаимно-однозначных преобразований пространственных переменных общего вида (см. раздел 6). Эти условия обобщают результаты работы [14] на случай конечного числа преобразований пространственных переменных. Для этого используются методы исследования бифуркации Андронова—Хопфа в бесконечномерных задачах, развитые в работах [18, 19].

Кроме того, получены необходимые и достаточные условия нормальности линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора задачи с конечным числом гладких взаимно-однозначных преобразований пространственных переменных общего вида (см. раздел 4). Эти условия обобщают результаты работ [3, 4, 22] на случай конечного числа преобразований пространственных переменных. Как и в указанных работах, рассматриваются все варианты взаимодействия преобразований пространственных переменных.

2. Постановка задачи

Рассмотрим квазилинейное параболическое функционально-дифференциальное уравнение с конечным числом преобразований переменных в младших членах:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = D\Delta u(x,t) + K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos(u(g_i(x),t))\Big), \quad x \in Q, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$; $D, K, \gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ — постоянные коэффициенты, не равные нулю; $g_i : V \to g_i(V)$ — взаимно-однозначные преобразования, $V \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{Q} \subset V$. Всюду далее будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.1. $g_i(Q) \cap Q \neq \varnothing$, $g_i(x) \not\equiv x$ $(x \in Q)$, $i = 1, \ldots, N$.

Уравнение (2.1) рассматривается с краевыми условиями Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{\nu}}\bigg|_{\partial Q \times \mathbb{R}} = 0, \tag{2.2}$$

где $\tilde{\nu} = (\nu, 0)$, ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке x.

В случае, если $g_i(Q) \setminus Q \neq \varnothing$ при некоторых i, зададим значения неизвестной функции $u(x,t)$ вне области Q:

$$u(g_i(x),t) = 0, \quad x \in \{x \in Q : g_i(x) \notin Q\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.3}$$

В соответствии с этим введем линейные операторы G_i, $i = 1, \ldots, N$, по формуле

$$(G_i u)(x,t) = \begin{cases} u(g_i(x),t), & x \in \{x \in Q : g_i(x) \in Q\}, \\ 0, & x \in \{x \in Q : g_i(x) \notin Q\}. \end{cases}$$

Также будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.2. *Операторы* $G_i : L_p(Q) \to L_p(Q)$, $i = 1, \ldots, N$, *ограничены.*

3. Линеаризация

Решение u задачи (2.1)–(2.3) называется *пространственно-однородным стационарным решением*, если оно не зависит от $x \in Q$ и $t \in \mathbb{R}$.

Из уравнений (2.1) и (2.3) для пространственно-однородного стационарного решения w получим

$$w(x) = K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos w(g_i(x))\Big), \quad x \in Q, \tag{3.1}$$

$$w(g_i(x)) = 0, \quad x \in \{x \in Q : g_i(x) \notin Q\}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{3.2}$$

По определению,

$$w(x) = \mathrm{const}, \quad x \in Q. \tag{3.3}$$

Рассмотрим следующее условие.

Условие 3.1. $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} \gamma_i \neq \sum\limits_{i \in \mathcal{M}} \gamma_i$ *для любых* $\mathcal{K}, \mathcal{M} \subseteq \{1, \dots, N\}$ *таких, что* $\mathcal{K} \neq \mathcal{M}$.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 3.1 *и существует* k *такое, что* $g_k(Q) \setminus Q \neq \varnothing$. *Тогда для разрешимости задачи* (3.1)–(3.3) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i\Big) = 2\pi m \tag{3.4}$$

для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. *В этом случае решение единственно, причем* $w = 2\pi m$.

Доказательство. Пусть в некоторой точке $x^0 \in Q$ имеет место $g_i(x^0) \in Q$, $i \in \mathcal{K}^0 \subseteq \{1, \dots, N\}$ и $g_i(x^0) \notin Q$, $i \in \overline{\mathcal{K}^0} = \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{K}^0$. В силу условия 2.1 и того, что по условию леммы $g_k(Q) \setminus Q \neq \varnothing$, можно выбрать точку x^1 такую, что $g_i(x^1) \in Q$, $i \in \mathcal{K}^1 \subseteq \{1, \dots, N\}$ и $g_i(x^1) \notin Q$, $i \in \overline{\mathcal{K}^1}$, причем $\mathcal{K}^0 \neq \mathcal{K}^1$.

Тогда из уравнений (3.1)–(3.3) при $x = x^0$ и $x = x^1$ соответственно получим

$$w = K\Big(1 + \sum_{i \in \mathcal{K}^0} \gamma_i \cos w + \sum_{i \in \overline{\mathcal{K}^0}} \gamma_i\Big), \qquad w = K\Big(1 + \sum_{i \in \mathcal{K}^1} \gamma_i \cos w + \sum_{i \in \overline{\mathcal{K}^1}} \gamma_i\Big). \tag{3.5}$$

Приравнивая правые части этих уравнений, придем к равенству

$$\sum_{i \in \mathcal{K}^0} \gamma_i \cos w + \sum_{i \in \overline{\mathcal{K}^0}} \gamma_i = \sum_{i \in \mathcal{K}^1} \gamma_i \cos w + \sum_{i \in \overline{\mathcal{K}^1}} \gamma_i,$$

откуда, приводя подобные слагаемые и учитывая, что $\overline{\mathcal{K}^1} \setminus \overline{\mathcal{K}^0} = \mathcal{K}^0 \setminus \mathcal{K}^1$, получим

$$\Big(\sum_{i \in \mathcal{K}^0 \setminus \mathcal{K}^1} \gamma_i - \sum_{i \in \mathcal{K}^1 \setminus \mathcal{K}^0} \gamma_i\Big) \cos w = \sum_{i \in \mathcal{K}^0 \setminus \mathcal{K}^1} \gamma_i - \sum_{i \in \mathcal{K}^1 \setminus \mathcal{K}^0} \gamma_i.$$

В силу условия 3.1 имеем $\cos w = 1$, $w = 2\pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$). Тогда из соотношений (3.5) получим (3.4). $\square$

Замечание 3.1. Пусть условие 3.1 не выполняется, т. е. существуют такие $\mathcal{K}$ и $\mathcal{M}$, $\mathcal{K} \neq \mathcal{M}$, что $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} \gamma_i = \sum\limits_{i \in \mathcal{M}} \gamma_i$. Без ограничения общности предположим, что $\mathcal{K} \cap \mathcal{M} = \varnothing$. Тогда существуют преобразования $g_1, \dots, g_N$ такие, что задача (3.1)–(3.3) имеет решения, отличные от решений, описанных в лемме 3.1.

Доказательство. Действительно, разобьем область Q на две подобласти Q_1 и Q_2 такие, что $\overline{Q_1} \cup \overline{Q_2} = \overline{Q}$ и $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Пусть

$$g_i(Q_1) \cap Q = \varnothing, \quad g_i(Q_2) \subseteq Q, \quad i \in \mathcal{K};$$
$$g_i(Q_2) \cap Q = \varnothing, \quad g_i(Q_1) \subseteq Q, \quad i \in \mathcal{M};$$
$$g_i(Q) \subseteq Q, \quad i \in \{1, \dots, N\} \setminus (\mathcal{K} \cup \mathcal{M}).$$

Тогда из уравнений (3.1)–(3.3) при $x^1 \in Q_1$ и $x^2 \in Q_2$ соответственно получим

$$w = K\Big(1 + \sum_{i\in\overline{\mathcal{K}}} \gamma_i \cos w + \sum_{i\in\mathcal{K}} \gamma_i\Big), \qquad w = K\Big(1 + \sum_{i\in\overline{\mathcal{M}}} \gamma_i \cos w + \sum_{i\in\mathcal{M}} \gamma_i\Big).$$

Поскольку из равенства $\sum\limits_{i\in\mathcal{K}} \gamma_i = \sum\limits_{i\in\mathcal{M}} \gamma_i = b$ следует $\sum\limits_{i\in\overline{\mathcal{K}}} \gamma_i = \sum\limits_{i\in\overline{\mathcal{M}}} \gamma_i = a$, то каждое из полученных уравнений тождественно уравнению

$$w = K\left(1 + a\cos w + b\right),$$

которое, очевидно, имеет не менее одного решения при любых K, a, b. □

Будем считать K бифуркационным параметром. Пусть w — решение задачи (3.1)–(3.3) для некоторого значения параметра K. Положим $u(x,t) = w + v(x,t)$. Тогда

$$v_t = \mathcal{L}v + \mathcal{N}(v), \tag{3.6}$$

где

$$\mathcal{L}v = D\Delta v - v - K\sum_{i=1}^{N} \gamma_i v_{g_i} \sin w_{g_i}, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{N}(v) = K\sum_{i=1}^{N} \gamma_i\Big(\cos(w_{g_i} + v_{g_i}) - \cos w_{g_i} + v_{g_i}\sin w_{g_i}\Big). \tag{3.8}$$

Здесь $v_{g_i} = v(g_i(x))$, $w_{g_i} = w(g_i(x))$.

Обозначим через $W_p^k(Q)$ ($\tilde{W}_p^k(Q)$) пространство Соболева вещественнозначных (комплекснозначных) функций с обобщенными производными вплоть до порядка k из $L_p(Q)$ ($\tilde{L}_p(Q)$). Символ $\tilde{}$ всюду будет указывать на пространства комплекснозначных функций либо на операторы, действующие в таких пространствах.

Рассмотрим линеаризованный оператор $\mathcal{L} : L_p(Q) \to L_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{v \in W_p^2(Q) : \partial v/\partial\nu\big|_{\partial Q} = 0\}$, определенный по формуле (3.7). Введем также оператор $\tilde{\mathcal{L}} : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}) = \{v \in \tilde{W}_p^2(Q) : \partial v/\partial\nu\big|_{\partial Q} = 0\}$ по формуле $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}v_1 + i\mathcal{L}v_2$, где $v_1, v_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, $v = v_1 + iv_2$.

Если выполнены условия леммы 3.1, то в силу этой леммы

$$w_{g_i} = w(g_i(x)) = \begin{cases} 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}), & g_i(x) \in Q, \\ 0, & g_i(x) \notin Q \end{cases}$$

и $\sin w_{g_i} = 0$. Тогда $\tilde{\mathcal{L}}v = D\Delta v - v$. Известно, что оператор $\tilde{\mathcal{L}} : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$, определенный по этой формуле, является самосопряженным, имеет дискретный спектр $\sigma(\tilde{\mathcal{L}})$, и $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}) \subset (-\infty, 0)$. По теореме из [15, п. 5.4.4] спектр оператора $\tilde{\mathcal{L}} : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ не зависит от p. Таким образом, если выполнены условия леммы 3.1, то

1. задача (2.1)–(2.3) имеет пространственно-однородное стационарное решение тогда и только тогда, когда $K = 2\pi m\Big(1 + \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i\Big)^{-1}$, $m \in \mathbb{Z}$;
2. спектр линеаризованного оператора $\tilde{\mathcal{L}} : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ вещественный и дискретный.

Следовательно, задача (2.1)–(2.3) не имеет бифуркационного семейства периодических решений в окрестности пространственно-однородного стационарного решения.

Поскольку условие 3.1 выполнено при почти всех $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathbb{R}^n$, то будем предполагать, что выполнено следующее условие, являющееся необходимым для существования бифуркационного семейства периодических решений.

Условие 3.2. $g_i(Q) \subseteq Q$, $i = 1, \ldots, N$.

Тогда пространственно-однородное стационарное решение задачи (2.1)–(2.3) удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$w = K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos w\Big). \tag{3.9}$$

Условие 3.3. $1 + \hat{K} \sin \hat{w} \sum\limits_{i=0}^{N} \gamma_i \neq 0$, *где* $\hat{w}$ — *решение уравнения* (3.9) *для* $K = \hat{K}$.

Из теоремы о неявной функции вытекает следующее утверждение (см. лемму 2 в [9]).

Лемма 3.2. *Пусть выполнено условие* 3.3. *Тогда для некоторого* $\varkappa_0 > 0$ *существует аналитическая функция* $w = w(\varkappa)$, $\varkappa \in (-\varkappa_0, \varkappa_0)$, *удовлетворяющая уравнению* (3.9) *при* $K = \hat{K} + \varkappa$, *причем* $w(0) = \hat{w}$.

Обозначим через $C^{\sigma}_{2\pi}(X)$ пространство всех σ-непрерывных по Гельдеру 2π-периодических функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C^{\sigma}_{2\pi}(X)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant 2\pi} \frac{\|\varphi(t) - \varphi(s)\|_X}{(t-s)^{\sigma}},$$

где X — вещественное банахово пространство, $0 < \sigma < 1$.

Пусть $C^{1,\sigma}_{2\pi}(X)$ — пространство дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ таких, что φ и φ' принадлежат $C^{\sigma}_{2\pi}(X)$. Это банахово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{C^{1,\sigma}_{2\pi}(X)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \|\varphi'\|_{C^{\sigma}_{2\pi}(X)}.$$

В работе [14] доказано следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия* 2.1, 2.2 *и* 3.2, *и пусть* $\Phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ — *вещественнозначная функция такая, что* $|\Phi^{(m)}(y)| \leqslant M$ *при* $y \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \ldots$, *где* $M > 0$ *не зависит от* y, m.

Тогда отображения $v \mapsto \Phi(v_{g_i})$ $(i = 1, \ldots, N)$ *из* $C^{\sigma}_{2\pi}(W^2_p(Q))$ *в* $C^{\sigma}_{2\pi}(L_p(Q))$ *являются аналитическими в каждой точке пространства* $C^{\sigma}_{2\pi}(W^2_p(Q))$, *где* $p > n/2$.

В дальнейшем будем предполагать, что условия 3.2, 3.3 выполняются. Положим $K = \hat{K} + \varkappa$. Тогда по лемме 3.2 в некоторой окрестности точки $\varkappa = 0$ существует аналитическая функция $w = w(\varkappa)$, удовлетворяющая уравнению (3.9) для $K = \hat{K} + \varkappa$ и такая, что $w(0) = \hat{w}$. Запишем решение $u(x,t) = u(x,t,\varkappa)$ задачи (2.1), (2.2) в виде $u(x,t,\varkappa) = w(\varkappa) + v(x,t,\varkappa)$. Уравнение (3.6) примет вид

$$v_t = f(v, \varkappa), \tag{3.10}$$

где $f(v,\varkappa) = D\Delta v - v + (\hat{K} + \varkappa) \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i \Big(\cos(w(\varkappa) + v_{g_i}) - \cos w(\varkappa)\Big)$.

Очевидно, $f_v(0,\varkappa)v = D\Delta v - v - (\hat{K} + \varkappa) \sin w(\varkappa) \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i v_{g_i}$.

Введем оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\varkappa) : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}(\varkappa)) = \{v \in \tilde{W}^2_p(Q) : \partial v/\partial\nu\big|_{\partial Q} = 0\}$ по формуле $\tilde{\mathcal{L}}(\varkappa) = f_v(0,\varkappa)$. Обозначим $\tilde{\mathcal{L}}_0 = \tilde{\mathcal{L}}(0) = f_v(0,0)$. Ясно, что

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 v = D\Delta v - v - \hat{K} \sin \hat{w} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i v_{g_i}. \tag{3.11}$$

Из лемм 3.2, 3.3 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия* 2.1, 2.2, 3.2, 3.3. *Тогда отображение* $(v, \varkappa) \mapsto f(v, \varkappa)$ *из* $C^{\sigma}_{2\pi}(W^2_p(Q)) \times (-\varkappa_0, \varkappa_0)$ *в* $C^{\sigma}_{2\pi}(L_p(Q))$ *является аналитическим в некоторой окрестности точки* $(0,0)$.

4. Нормальность линеаризованного оператора

В этом разделе мы изучим условия нормальности линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора с конечным числом преобразований $g_1, \dots, g_N$ пространственных переменных. Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}_0) = \{v \in \tilde{W}_2^2(Q) : \partial v/\partial\nu\big|_{\partial Q} = 0\}$, заданный по формуле (3.11).

Из свойств нормального оператора с компактной резольвентой следует, что нормальность оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0$ эквивалентна существованию в $\tilde{L}_2(Q)$ ортонормированного базиса, состоящего из собственных функций оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0$ (см. [6, 11], [21, теорема 3.3]). Этот результат также справедлив в случае любого конечного числа преобразований переменных.

В работах [12, 21] существование такого базиса лежало в основе доказательства возникновения бифуркации Андронова—Хопфа периодических решений задачи (2.1)–(2.3) при $N = 1$. В настоящей работе возникновение бифуркации Андронова—Хопфа периодических решений задачи (2.1)–(2.3) будет доказано без предположения нормальности оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0$ методом, развитым в работах [14, 18, 19].

4.1. Определения. Обозначим через $J_{g_i}(x) = [\partial g_{ip}/\partial x_q]_{p,q=1}^n$ матрицу Якоби преобразования g_i, а через $|J_{g_i}(x)| = |\det J_{g_i}(x)|$ — модуль ее определителя, $i = 1, \dots, N$.

Введем дополнительное ограничение на преобразования $g_1, \dots, g_N$, определенные в разделе 2.

Условие 4.1. $g_i \in C^3, \ \ |J_{g_i}(x)| \neq 0, \ \ x \in V, \ \ i = 1, \dots, N$

Всюду в разделе 4 будем предполагать, что выполнены условия 3.2 и 4.1.

Введем неограниченный оператор $A_0 : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$, действующий по формуле

$$A_0 v = \Delta v,$$

с областью определения $\mathcal{D}(A_0) = \{v \in \tilde{W}_2^2(Q) : Bv = 0\}$. Здесь оператор $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v/\partial\nu)|_{\partial Q}$ задает краевые условия, ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$. Как известно, оператор A_0 — самосопряженный.

Рассмотрим оператор $A : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$,

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i,$$

где A_i, $i = 1, \dots, N$ — ограниченные линейные операторы преобразования переменных, определенные на всем пространстве $\tilde{L}_2(Q)$ по формуле

$$A_i : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q), \quad A_i v(x) = a_i v(g_i(x)),$$

где $a_i \neq 0$ — вещественные числа, $i = 1, \dots, N$.

Оператор A называется *нормальным*, если $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A)$ и

$$AA^*v = A^*Av$$

для всех $v \in \mathcal{D}(AA^*)$.

Положим $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0)$. Оператор A при соответствующем выборе коэффициентов совпадает с оператором $\tilde{\mathcal{L}}_0 + I$. Очевидно, что нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0$.

Введем множества $G_{g_i}^m = \{x \in Q : g_i^m(x) \neq x\}$, $m = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, N$. Здесь $g_i^m(x)$ обозначает преобразование g_i, примененное m раз. Обозначим $\widehat{G}_{g_i}^m = Q \setminus G_{g_i}^m$. Будем записывать суперпозицию преобразований в виде $g_i g_j(x)$, $g_i^{-1} g_j(x)$ и т. д.

4.2. Необходимые и достаточные условия нормальности. Сначала введем несколько условий, которые будут использоваться при формулировке теорем.

Условие 4.2. $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} a_i \neq 0$ *для любого подмножества* $\mathcal{K} \subset \{1, \dots, N\}$ *такого, что* $\mathcal{K} \neq \varnothing$.

Условие 4.3. $g_i(x) \neq g_j{}^{-1}(x)$ *для почти всех* $x \in Q$ *и всех* $i, j = 1, \dots, N$, $i \neq j$.

Условие 4.4. $\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, a_i a_j \neq 0$ *для любых* $\alpha_{ij} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, *не равных одновременно нулю.*

Следующие два условия являются более слабыми версиями условий 4.2 и 4.4. Пусть $0 \leqslant M \leqslant N$.

Условие 4.2^M. $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} a_i \neq 0$ *для любого подмножества* $\mathcal{K} \subset \{1, \dots, M\}$ *такого, что* $\mathcal{K} \neq \varnothing$.

Условие 4.4^M. $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant M\\ 1 \leqslant j \leqslant N\\ i<j}} \alpha_{ij}\, a_i a_j \neq 0$ *для любых* $\alpha_{ij} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, *не равных одновременно нулю.*

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$.

1. *Если оператор* A — *нормальный и выполнены условия* 4.2 *и* 4.3, *то*
$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \tag{4.1}$$
где K_i — *ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.
2. *Если выполнено свойство* (4.1) *и*
$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i, j = 1, \dots, N, \tag{4.2}$$
то оператор A — *нормальный.*
3. *Если выполнены условия* 4.2, 4.3 *и* 4.4, *то оператор* A *является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства* (4.1) *и* (4.2).

Теорема 4.2. *Пусть* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = 1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, *и справедливы следующие утверждения.*

1. *Если оператор* A — *нормальный и выполнено хотя бы одно из условий* 4.2, 4.3, *то*
$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \tag{4.3}$$
а оператор A *является самосопряженным.*
2. *Если выполнено свойство* (4.3), *то оператор* A — *самосопряженный.*

Теорема 4.3. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, M$, *а также* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$, *и справедливы следующие утверждения.*

1. *Если оператор* A — *нормальный и выполнены условия* 4.2^M *и* 4.3, *то*
$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \tag{4.4}$$
$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = M+1, \dots, N, \tag{4.5}$$
где K_i — *ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.
2. *Если выполнены свойства* (4.4) *и* (4.5), *а также*
$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, \tag{4.6}$$
то оператор A — *нормальный.*
3. *Если выполнены условия* 4.2^M, 4.3 *и* 4.4^M, *то оператор* A *является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства* (4.4)–(4.6).

4.3. Комментарии. Теоремы 4.1 и 4.2 являются частными случаями теоремы 4.3 при $M = N$ и $M = 0$ соответственно. В случае $M = 0$ (теорема 4.2) оказалось возможным дополнительно усилить результат теоремы 4.3, заменив нормальность на самосопряженность, а условие 4.3 на условие 4.2.

Условие 4.4 достаточно громоздко, однако оно выполняется для почти всех векторов $(a_1, \dots, a_N)$, исключая только множество меры нуль в $\mathbb{R}^N$ (конечное число гиперповерхностей). С другой стороны, многие простые наборы коэффициентов $a_1, \dots, a_N$ не удовлетворяют условию 4.4 (например, коэффициенты $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$). Трудность заключается в том, что условие 4.4 при больших N практически невозможно проверить: речь идет о $5^{N(N-1)/2} - 3^{N(N-1)/2}$ неравенствах. Условие 4.4 требуется только для того, чтобы доказать, что свойство (4.2) в теореме 4.1 следует из нормальности оператора A. Аналогично, условие 4.4^M требуется только для того, чтобы доказать, что свойство (4.6) в теореме 4.3 следует из нормальности оператора A.

Доказательства необходимых и достаточных условий нормальности оператора A приводятся в пунктах 4.5–4.7.

В этом пункте мы рассмотрим пример чисел $a_1, \dots, a_N$, удовлетворяющих условию 4.4. Фактически, будут сформулированы некоторые достаточные условия, при который выполняется условие 4.4. Сначала докажем некоторые предложения.

Предложение 4.1. *Пусть $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, $b_k = b_0 q^k$ — геометрическая прогрессия в $\mathbb{R}$ со знаменателем $q \geqslant 2$. Тогда для любой конечной подпоследовательности $\{b_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_{k_N}\}$ $(0 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_N < \infty)$ и любых чисел $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \dots, N$, таких, что*

$$\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} |\alpha_i|}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} |\alpha_i|} \leqslant m, \quad 1 \leqslant m \leqslant q-1,$$

следующая линейная комбинация чисел не обращается в нуль:

$$\alpha_1 b_{k_1} + \alpha_2 b_{k_2} + \dots + \alpha_N b_{k_N} \neq 0.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$|\alpha_1 b_{k_1} + \alpha_2 b_{k_2} + \dots + \alpha_{N-1} b_{k_{N-1}}| < |\alpha_N b_{k_N}|. \tag{4.7}$$

Разделим обе части неравенства (4.7) на $|\alpha_N|$. Тогда, используя определение чисел $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$, оценим левую часть неравенства:

$$\left|\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_N} b_{k_i}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_N} b_{k_i}\right| \leqslant m \sum_{i=0}^{N-1} |b_{k_i}|.$$

В силу этой оценки неравенство (4.7) следует из неравенства

$$m \sum_{i=0}^{N-1} |b_{k_i}| < |b_{k_N}|. \tag{4.8}$$

По определению чисел b_k, используя формулу для суммы геометрической прогрессии, неравенство (4.8) преобразуется к виду

$$m \frac{q^{k_N} - 1}{q - 1} < q^{k_N}. \tag{4.9}$$

Обозначим $\varepsilon = q - 1 - m$. Тогда неравенство (4.9) превращается в неравенство $1 - q < \varepsilon(q^{k_N} - 1)$, которое верно, поскольку $q \geqslant 2$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant q - 2$ в силу условия $1 \leqslant m \leqslant q - 1$. $\square$

Используем обозначение $\mathbb{Q}$ для множества рациональных чисел.

Предложение 4.2. *Для любых $p \in \mathbb{Q}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{Q}$ (таких, что $\exists \alpha_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant N$) и $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$ $(n_1 < n_2 < \dots < n_N)$ выполнено следующее неравенство:*

$$\alpha_1 \cos(n_1) + \alpha_2 \cos(n_2) + \dots + \alpha_N \cos(n_N) \neq p.$$

Доказательство. Напротив, предположим, что существуют числа $p \in \mathbb{Q}$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ и $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, N$ такие, что $n_1 < n_2 < \dots < n_N$, $\exists \alpha_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant N$, при которых

$$\alpha_1 \cos(n_1) + \alpha_2 \cos(n_2) + \dots + \alpha_N \cos(n_N) = p.$$

Применяя формулу

$$\cos nx = 2\cos x \cos(n-1)x - \cos(n-2)x, \quad n = 2, 3, \dots,$$

представим $\cos n_i$ как линейную комбинацию $(\cos 1)^{n_i}$, $(\cos 1)^{n_i - 1}, \dots, 1$ с целыми коэффициентами, $i = 1, \dots, N$. Тогда получим

$$\hat{\alpha}_{n_N} (\cos 1)^{n_N} + \hat{\alpha}_{n_N - 1} (\cos 1)^{n_N - 1} + \dots + \hat{\alpha}_1 \cos 1 = \hat{p}.$$

Это алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами. Оно не является тождеством, поскольку легко видеть, что $\hat{\alpha}_{n_m} \neq 0$, где $m = \max\{i : \alpha_i \neq 0\}$. Однако $\cos 1$ — трансцендентное число, следовательно, оно не является корнем этого уравнения. Полученное противоречие доказывает предложение. □

Следующее предложение дает пример чисел $a_1, \dots, a_N$, удовлетворяющих условию 4.4.

Предложение 4.3. *Пусть числа*

$$n_i = b_0 q^{k_i}, \quad i = 1, \dots, N,$$

таковы, что $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1 < k_2 < \ldots < k_N$, $b_0, q \in \mathbb{N}$ *и* $q \geqslant 3$. *Тогда числа*

$$a_i = \cos n_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

удовлетворяют условию 4.4.

Доказательство. Рассмотрим сумму из условия 4.4:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, a_i a_j = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, \cos n_i \cos n_j = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} \bigl(\cos(n_i + n_j) + \cos(n_i - n_j)\bigr). \tag{4.10}$$

В силу предложения 4.1 из определения чисел $n_1, \dots, n_N$ следует, что $n_i \pm n_j \neq n_k \pm n_l$ для любых $i, j, k, l = 1, \dots, N$, $i \neq j$, $k \neq l$, $(i, j) \neq (k, l)$. (Действительно, в обозначениях предложения 4.1 мы имеем $b_{k_i} = n_i$, $q \geqslant 3$, $\alpha_i \in \{\pm 1, \pm 2\}$ и $m = 2$.) Следовательно, при любых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, не равных одновременно нулю, сумма в правой части выражения (4.10) состоит из ненулевого числа косинусов с попарно различными целыми аргументами. Из предложения 4.2 следует, что такая сумма не равна нулю. Таким образом, условие 4.4 выполняется для чисел $a_1, \dots, a_N$. □

Следующее предложение описывает некоторый класс чисел, удовлетворяющих условию 4.4.

Предложение 4.4. *Пусть* $a_1, \dots, a_N$ *— числа, заданные в предложении* 4.3. *Тогда для любых* $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_N \in \mathbb{Q}$ *и* $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta \neq 0$, *числа*

$$\hat{a}_i + \delta a_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

удовлетворяют условию 4.4.

Доказательство. Рассмотрим сумму из условия 4.4 для чисел $\hat{a}_i + \delta a_i$, $i = 1, \dots, N$:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, (\hat{a}_i + \delta a_i)(\hat{a}_j + \delta a_j) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} \hat{a}_i \hat{a}_j + \delta \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} \bigl(\hat{a}_i a_j + \hat{a}_j a_i\bigr) + \delta^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} a_i a_j. \tag{4.11}$$

Первая сумма в правой части является рациональным числом. Таким же образом, как в доказательстве предложения 4.3, представим вторую и третью суммы в виде линейных комбинаций косинусов целых аргументов с рациональными коэффициентами. В силу предложения 4.1 из определения чисел $n_1, \dots, n_N$ следует, что $n_k \neq n_i \pm n_j$ для любых $i, j, k = 1, \dots, N$, $i < j$. (Действительно, в обозначениях предложения 4.1 мы имеем $\{b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}\} = \{n_i, n_j, n_k\}$, $q \geqslant 3$, $\alpha_i \in \{\pm 1, \pm 2\}$ и $m = 2$.) Следовательно, вторая сумма порождает линейную комбинацию косинусов с целыми аргументами, не равными ни одному из целых аргументов косинусов в линейной комбинации, порожденной третьей суммой. С другой стороны, при доказательстве предложения 4.3 было показано, что при любых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, не равных одновременно нулю, линейная комбинация косинусов, порожденная третьей суммой, состоит хотя бы из одного косинуса. Таким образом, для любых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, не равных одновременно нулю, правая часть равенства (4.11) состоит из рационального числа и линейной комбинации с рациональными коэффициентами ненулевого числа косинусов с попарно различными целыми аргументами. Следовательно, в силу предложения 4.2, выражение (4.11) не равно нулю. Это доказывает, что условие 4.4 выполняется для чисел $\hat{a}_i + \delta a_i$, $i = 1, \dots, N$. □

Таким образом, можно взять любой набор рациональных чисел $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_N$, удовлетворяющий или не удовлетворяющий условию 4.4, и модифицировать его согласно предложению 4.4 (при этом $\delta \neq 0$ можно выбирать сколь угодно малым). Тогда в силу предложения 4.4 модифицированный набор чисел $\hat{a}_1 + \delta a_1, \dots, \hat{a}_N + \delta a_N$ будет удовлетворять условию 4.4.

4.4. Вспомогательные утверждения.

Замечание 4.1. Так как $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A_0^*)$, а линейные операторы $A_i, A_i^* : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$, $i = 1, \dots, N$, ограничены, мы имеем $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A_0)$.

Лемма 4.1. *Оператор A_i^*, сопряженный к оператору A_i, $i = 1, \dots, N$, определяется по формуле*

$$A_i^* v(x) = \begin{cases} a_i |J_{g_i^{-1}}(x)| v(g_i^{-1}(x)), & x \in g_i(Q), \\ 0, & x \in Q \setminus g_i(Q), \end{cases}$$

где $|J_{g_i^{-1}}(x)| = |\det J_{g_i^{-1}}(x)|$, а $J_{g_i^{-1}}(x)$ — матрица Якоби преобразования g_i^{-1}.

Доказательство очевидно: достаточно заменить переменную интегрирования в соответствующем скалярном произведении в $\tilde{L}_2(Q)$.

Лемма 4.2. *Если $G_{g_i}^2 = \varnothing$, то $g_i(Q) = Q$.*

Доказательство. Действительно, поскольку $G_{g_i}^2 = \varnothing$, для любой точки $x \in Q$ мы имеем $x = g_i^2(x)$. Так как преобразование g_i взаимно-однозначно, получим $g_i^{-1}(x) = g_i(x)$. Согласно принятым предположениям, $g_i(Q) \subset Q$. Следовательно, любая точка $x \in Q$ имеет прообраз $g_i^{-1}(x) = g_i(x) \in Q$. Таким образом, $g_i(Q) = Q$. □

Лемма 4.3. *Пусть $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, и для любого $x \in Q$ выполнены следующие условия*:

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad i = 1, \dots, N, \tag{4.12}$$

$$\left\{ g_i g_j^{-1}(x),\ g_j g_i^{-1}(x) \right\} = \left\{ g_i^{-1} g_j(x),\ g_j^{-1} g_i(x) \right\}, \quad i, j = 1, \dots, N. \tag{4.13}$$

Тогда оператор $\sum\limits_{i=1}^{N} A_i$ — нормальный.

Доказательство. Используя лемму 4.1, для любых $v \in \tilde{L}_2(Q)$ и $i, j = 1, \dots, N$ при почти всех $x \in Q$ мы получим

$$A_i A_i^* v(x) = a_i^2 |J_{g_i^{-1}}(g_i(x))| v(x), \qquad A_i^* A_i v(x) = a_i^2 |J_{g_i^{-1}}(x)| v(x),$$
$$A_i A_j^* v(x) = a_i a_i |J_{g_j^{-1}}(g_i(x))| v(g_j^{-1} g_i(x)), \qquad A_i^* A_j v(x) = a_i a_j |J_{g_i^{-1}}(x)| v(g_j g_i^{-1}(x)).$$

Так как $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, из условия (4.12) с помощью известного тождества $|J_f(x)|\,|J_{f^{-1}}(f(x))| = 1$ получим $|J_{g_i^{-1}}(x)| = 1$, $x \in Q$. Тогда для любых $v \in \tilde{L}_2(Q)$ при почти всех $x \in Q$ будем иметь

$$\left(\sum_{i=1}^{N} A_i \right) \left(\sum_{i=1}^{N} A_i^* \right) v(x) = v(x) \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} a_i a_j \left(v(g_i^{-1} g_j(x)) + v(g_j^{-1} g_i(x)) \right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} A_i^* \right) \left(\sum_{i=1}^{N} A_i \right) v(x) = v(x) \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} a_i a_j \left(v(g_i g_j^{-1}(x)) + v(g_j g_i^{-1}(x)) \right).$$

Следовательно, в силу условия (4.13) оператор $\sum\limits_{i=1}^{N} A_i$ — нормальный. □

Замечание 4.2. Условие (4.13) означает, что для каждого $x \in Q$ и $i, j = 1, \dots, N$ верна по крайней мере одна из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} g_i g_j^{-1}(x) = g_i^{-1} g_j(x), \\ g_j g_i^{-1}(x) = g_j^{-1} g_i(x), \end{cases} \tag{4.14}$$

$$\begin{cases} g_i g_j^{-1}(x) = g_j^{-1} g_i(x), \\ g_j g_i^{-1}(x) = g_i^{-1} g_j(x). \end{cases} \tag{4.15}$$

Пусть система (4.14) выполнена при некотором $x \in Q$. Поскольку преобразования g_i и g_j взаимно-однозначны и $g_i(Q) = g_j(Q) = Q$, получим: $g_i g_j^{-1}(x) = g_i^{-1} g_j(x)$; $g_i^2 g_j^{-1}(x) = g_j(x)$; $g_j g_i^{-2}(y) = g_j^{-1}(y)$, где $y = g_j(x)$; $g_i^{-2}(y) = g_j^{-2}(y)$;

$$g_i^2(z) = g_j^2(z), \quad z = g_j^{-2}(y) = g_j^{-1}(x).$$

Аналогично, если система (4.15) выполнена при некотором $x \in Q$, получим: $g_i g_j^{-1}(x) = g_j^{-1} g_i(x)$; $g_j g_i g_j^{-1}(x) = g_i(x)$; $g_j g_i^{-1} g_j^{-1}(y) = g_i^{-1}(y)$, где $y = g_i(x)$; $g_i^{-1} g_j^{-1}(y) = g_j^{-1} g_i^{-1}(y)$;

$$g_i g_j(z) = g_j g_i(z), \quad z = g_j^{-1} g_i^{-1}(y) = g_j^{-1}(x).$$

Таким образом, условие (4.13) означает, что при каждом $x \in Q$ и $i, j = 1, \ldots, N$ выполнено по крайней мере одно из равенств

$$g_i^2(x) = g_j^2(x), \quad g_i g_j(x) = g_j g_i(x).$$

Пример 4.1. Рассмотрим пример оператора $A_1 + \ldots + A_N$, который не является нормальным, так как преобразования $g_1, \ldots, g_N$ не удовлетворяют условию (4.13) леммы 4.3. Положим $N = 2$, $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4\}$ и рассмотрим преобразования g_1 и g_2, которые являются преобразованиями поворота вокруг осей x_1 и x_2 соответственно:

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad g_2(x) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Положим $\varphi = \psi = \pi/3$ и выберем точку $x^0 = (0,\ 0,\ 1)^T$. Получим (см. рис. 4.1):

$$\begin{aligned}
&g_2^{-1} g_1(x^0) = g_2^{-1}(0,\ -\sqrt{3}/2,\ 1/2)^T = (\sqrt{3}/4,\ -\sqrt{3}/2,\ 1/4)^T, \\
&g_1 g_2^{-1}(x^0) = g_1(\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)^T = (\sqrt{3}/2,\ -\sqrt{3}/4,\ 1/4)^T, \\
&g_1^{-1} g_2(x^0) = g_1^{-1}(-\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)^T = (-\sqrt{3}/2,\ \sqrt{3}/4,\ 1/4)^T, \\
&g_2 g_1^{-1}(x^0) = g_2(0,\ \sqrt{3}/2,\ 1/2)^T = (-\sqrt{3}/4,\ \sqrt{3}/2,\ 1/4)^T.
\end{aligned}$$

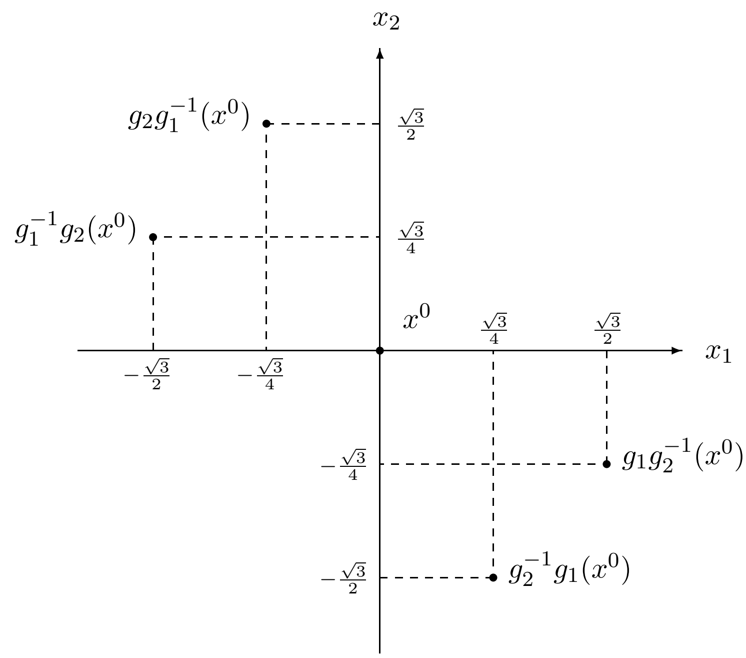

Рис. 4.1

Выполнены все условия леммы 4.3, кроме условия (4.13). Как было показано в доказательстве леммы 4.3, нормальность оператора $A_1 + A_2$ эквивалентна равенству

$$v(g_2^{-1} g_1(x)) + v(g_1^{-1} g_2(x)) = v(g_2 g_1^{-1}(x)) + v(g_1 g_2^{-1}(x)) \tag{4.16}$$

для всех $v \in \tilde{L}_2(Q)$ при почти всех $x \in Q$. Выберем достаточно малую окрестность $U_\delta(x^0)$ и функцию ξ такую, что $\operatorname{supp}\xi \subset g_2^{-1}g_1(U_\delta(x^0))$. Очевидно, функция ξ не удовлетворяет равенству (4.16) при $x \in U_\delta(x^0)$. Следовательно, оператор $A_1 + A_2$ не является нормальным.

Отметим, что рассмотренные g_1 и g_2 — некоммутирующие аффинные преобразования с ортогональными матрицами. Доказывая лемму 4.5, мы покажем, что для аффинных преобразований с ортогональными матрицами условие (4.13) эквивалентно коммутативности этих преобразований.

4.5. Доказательство теоремы 4.1.

Лемма 4.4. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. *Если оператор* A — *нормальный и выполнены условия* 4.2 *и* 4.3, *то*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \tag{4.17}$$

где K_i — *ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$.

Доказательство. Получим формулу (4.17) для преобразования g_1 (преобразования g_i, $i = 2, \dots, N$, рассматриваются аналогично). По определению, множества $G^m_{g_i}$, $m = 1, 2$, открытые и $G^2_{g_i} \subset G^1_{g_i}$, $i = 1, \dots, N$. Выберем точку $x^0 \in G^2_{g_1}$. По определению множества $G^2_{g_1}$, при $x = x^0$ выполнены следующие неравенства:

$$g_1(x) \neq x, \qquad (A1) \qquad\qquad g_1^2(x) \neq x. \qquad (A2)$$

Поскольку $g_i(Q) = Q$, очевидно, что $g_i(\widehat{G}^2_{g_i}) = \widehat{G}^2_{g_i}$, откуда $\overline{g_i(G^2_{g_i}) = G^2_{g_i}}$, $i = 1, \dots, N$. Обозначим $B_\delta(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \delta\}$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\overline{B_{2\delta}(x^0)} \subset G^2_{g_1}$ и выполнены следующие условия:

$$B_{2\delta}(x^0) \cap g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \qquad (B1) \qquad\qquad B_{2\delta}(x^0) \cap g_1^2(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing. \qquad (B2)$$

1. Предположим, что при $x = x^0$ и $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$ выполнены следующие неравенства:

$$g_i(x) \neq x, \qquad (A3_i) \qquad\qquad g_1(x) \neq g_i(x), \qquad (A4_i)$$

$$g_1(x) \neq g_i^{-1}(x), \qquad (A5_i) \qquad\qquad g_1^2(x) \neq g_i(x), \qquad (A6_i)$$

$$g_1(x) \neq g_i g_1(x), \qquad (A7_i) \qquad\qquad g_1^{-1}(x) \neq g_i^{-1} g_1(x), \qquad (A8_i)$$

$$g_i(x) \neq g_j g_1(x), \qquad (A9_{ij}) \qquad\qquad g_i^{-1}(x) \neq g_j^{-1} g_1(x). \qquad (A10_{ij})$$

Вследствие непрерывности преобразований g_i, $i = 1, \dots, N$, можно выбрать $\delta > 0$ достаточно малым, чтобы при $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$ удовлетворялись следующие условия:

$$B_{2\delta}(x^0) \cap g_i(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \qquad (B3_i) \qquad\qquad g_1(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \qquad (B4_i)$$

$$g_1(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i^{-1}(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \qquad (B5_i) \qquad\qquad g_1^2(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \qquad (B6_i)$$

$$g_1(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \qquad (B7_i) \qquad\qquad g_1^{-1}(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i^{-1} g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing. \qquad (B8_i)$$

$$g_i(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_j g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \qquad (B9_{ij}) \qquad\qquad g_i^{-1}(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_j^{-1} g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing. \qquad (B10_{ij})$$

Далее применим подход, использованный в работе [13]. Введем функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = 1$ при $x \in g_1(B_\delta(x^0))$ и $\operatorname{supp}\xi \subset g_1(B_{2\delta}(x^0))$. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — некоторый полином. По определению $g_1, \dots, g_N$ очевидно, что $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ и $u \in \mathcal{D}(A^*A)$. Рассмотрим AA^*u и A^*Au. Используя определение функции ξ и учитывая соотношения $\operatorname{supp}(A_i u) = g_i^{-1}(\operatorname{supp} u)$ и $\operatorname{supp}(A_i^* u) = g_i(\operatorname{supp} u)$, $i = 1, \dots, N$, при $x \in B_\delta(x^0)$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$, мы получим:

$$A_1 A_1^* u(x) = 0, \qquad A_1^* A_1 u(x) = 0 \qquad \text{из условия } (B1);$$

$$A_i A_i^* u(x) = 0, \qquad A_i^* A_i u(x) = 0 \qquad \text{из условия } (B1);$$

$$A_0 A_1^* u(x) = 0, \qquad A_1^* A_0 u(x) = 0 \qquad \text{из условия } (B2);$$

$$A_0 A_i u(x) = 0, \qquad A_i A_0 u(x) = 0 \qquad \text{из условия } (B4_i);$$

$$A_0 A_i^* u(x) = 0, \qquad A_i^* A_0 u(x) = 0 \qquad \text{из условия } (B5_i);$$

$$
\begin{aligned}
&A_1A_i^*u(x)=0 &&\text{из условия } (B7_i);\\
&A_1^*A_iu(x)=0 &&\text{из условия } (B8_i);\\
&A_iA_1^*u(x)=0 &&\text{из условия } (B6_i);\\
&A_i^*A_1u(x)=0 &&\text{из условия } (B3_i);\\
&A_iA_j^*u(x)=0 &&\text{из условия } (B9_{ij});\\
&A_i^*A_ju(x)=0 &&\text{из условия } (B10_{ij}).
\end{aligned}
$$

Так как оператор A — нормальный, мы имеем $AA^*u=A^*Au$. Отсюда

$$A_0A_1u(x)=A_1A_0u(x),\quad x\in B_\delta(x^0).$$

Следовательно,

$$\Delta u(g_1(x))=(\Delta u)(g_1(x)),\quad x\in B_\delta(x^0). \tag{4.18}$$

Дифференцируя сложную функцию $u(g_1(x))$, из уравнения (4.18) мы получим при $x\in B_\delta(x^0)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial^2u(g_1(x))}{\partial g_{1r}\partial g_{1s}}\frac{\partial g_{1r}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial g_{1s}(x)}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial u(g_1(x))}{\partial g_{1r}}\frac{\partial^2 g_{1r}(x)}{\partial {x_i}^2}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial^2u(g_1(x))}{\partial {g_{1r}}^2}. \tag{4.19}$$

Положим полином $P(x)$ равным $(x_k-g_{1k}(x^B))(x_m-g_{1m}(x^B))$, где $x^B\in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Тогда из равенства (4.19) при $x=x^B$ получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{1k}(x^B)}{\partial x_i}\right)^2=1,\quad k=m=1,\dots,n, \tag{4.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_{1k}(x^B)}{\partial x_i}\frac{\partial g_{1m}(x^B)}{\partial x_i}=0,\quad k,m=1,\dots,n,\quad k\neq m. \tag{4.21}$$

Равенства (4.20) и (4.21) можно записать в матричном виде:

$$J_{g_1}(x^B)J_{g_1}^T(x^B)=E. \tag{4.22}$$

Следовательно,

$$J_{g_1}^T(x^B)J_{g_1}(x^B)=E. \tag{4.23}$$

Запишем равенство (4.23) в координатном виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_{1i}(x^B)}{\partial x_k}\frac{\partial g_{1i}(x^B)}{\partial x_m}=\begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m,\end{cases}\qquad k,m=1,\dots,n. \tag{4.24}$$

Поскольку точка $x^B\in B_\delta(x^0)$ выбрана произвольно, получим равенство (4.24) для всех $x\in B_\delta(x^0)$. Дифференцируя (4.24) по x_l, $l=1,\dots,n$, для любого $x\in B_\delta(x^0)$ получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_m}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_k}\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_l\partial x_m}=0. \tag{4.25}$$

Циклически переставляя индексы k, l и m в равенстве (4.25), для любого $x\in B_\delta(x^0)$ получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_m\partial x_k}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_l}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_m}\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k\partial x_l}=0, \tag{4.26}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_l\partial x_m}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_l}\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_m\partial x_k}=0. \tag{4.27}$$

Складывая равенства (4.25) и (4.26) и вычитая равенство (4.27), для любого $x\in B_\delta(x^0)$ получим

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_m}=0,\quad k,l,m=1,\dots,n.$$

Таким образом, при любых фиксированных k, l и $x \in B_\delta(x^0)$ мы получили однородную систему линейных алгебраических уравнений с детерминантом $\det J_{g_1}(x) \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \quad i,k,l = 1,\dots,n, \quad x \in B_\delta(x^0). \tag{4.28}$$

Следовательно, $g_{1i}(x)$, $i = 1\dots,n$ — линейные функции переменных $x_1,\dots,x_n$ в $B_\delta(x^0)$, т. е.

$$g_1(x) = K_1^{x^0} x + b_1^{x^0}, \quad x \in B_\delta(x^0). \tag{4.29}$$

В силу равенства (4.22) матрица $K_1^{x^0}$ ортогональная.

Теперь рассмотрим различные случаи, когда нарушаются неравенства $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i,j = 2,\dots,N$ $(i \neq j)$. Они обращаются в равенства, а поскольку преобразования g_i, $i = 1,\dots,N$ — гладкие, такие равенства имеют место на замкнутых множествах. Для каждой граничной точки таких множеств можно построить последовательность внешних точек, имеющую предел в граничной точке. Переходя к пределу, распространим формулу (4.29) на все такие граничные точки. Поэтому ниже мы рассмотрим случаи, когда неравенства $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i,j = 2,\dots,N$ $(i \neq j)$, нарушаются на замкнутых множествах с непустой внутренностью. Неравенства $(A1)$, $(A2)$ и условия $(B1)$, $(B2)$ остаются верными во всех рассмотренных ниже случаях.

2. Пусть некоторые из неравенств $(A3_i)$, $i = 2,\dots,N$, нарушаются в окрестности точки $x^0 \in G^2_{g_1}$:

$$g_i(x) = x \quad \forall x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}, \quad i \in \mathcal{K}_3 \subset \{2,\dots,N\}, \quad \mathcal{K}_3 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A3}$}$$

причем для любых $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$ выполняются неравенства $(A3_i)$ при $i \notin \mathcal{K}_3$, а неравенства $(A4_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i,j = 2,\dots,N$ $(i \neq j)$, остаются верными. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются условия $(B3_i)$, $i \notin \mathcal{K}_3$, $(B4_i)$–$(B8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i,j = 2,\dots,N$ $(i \neq j)$. Условия $(B3_i)$, $i \in \mathcal{K}_3$, нарушаются. Введем срезающую функцию ξ в области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — полином. Поскольку условия $(B3_i)$, $i \in \mathcal{K}_3$, нарушены, при $x \in B_\delta(x^0)$ мы имеем

$$A_i^* A_1 u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_3.$$

Учитывая $(\overline{A3})$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_i^* A_1 u(x) = a_1 a_i |J_{g_i^{-1}}(x)| u(g_1 g_i^{-1}(x)) = a_1 a_i u(g_1(x)), \quad i \in \mathcal{K}_3. \tag{4.30}$$

Поскольку оператор A нормальный, так же, как в пункте 1 доказательства, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_0 A_1 u(x) + \sum_{i \in \mathcal{K}_3} A_i^* A_1 u(x) = A_1 A_0 u(x). \tag{4.31}$$

Пусть $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$, где $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. При $x \in B_\delta(x^0)$ и $k,m = 1,\dots,n$ получим

$$u(g_1(x)) = (g_{1k}(x) - g_{1k}(x^B))(g_{1m}(x) - g_{1m}(x^B)),$$
$$\big[u(g_1(x))\big]_{x_i} = g_{1k x_i}(x)(g_{1m}(x) - g_{1m}(x^B)) + g_{1m x_i}(x)(g_{1k}(x) - g_{1k}(x^B)),$$

откуда

$$u(g_1(x))\Big|_{x=x^B} = \big[u(g_1(x))\big]_{x_i}\Big|_{x=x^B} = 0. \tag{4.32}$$

Из равенств (4.30) и (4.32) получим

$$A_i^* A_1 u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \quad i \in \mathcal{K}_3.$$

Тогда из уравнения (4.31) вытекает, что

$$A_0 A_1 u(x)\big|_{x=x^B} = A_1 A_0 u(x)\big|_{x=x^B}. \tag{4.33}$$

В силу уравнения (4.19) из (4.33) получим соотношения (4.20) и (4.21). Тогда равенства (4.28) получаются так же, как и в пункте 1 доказательства. Таким образом, представление (4.29) остается верным.

3. Пусть некоторые из неравенств $(A4_i)$, $i = 2,\dots,N$, нарушаются в окрестности точки $x^0 \in G^2_{g_1}$:

$$g_1(x) = g_i(x) \quad \forall x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}, \quad i \in \mathcal{K}_4 \subset \{2,\dots,N\}, \quad \mathcal{K}_4 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A4}$}$$

причем для любых $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$ выполняются неравенства $(A4_i)$ при $i \notin \mathcal{K}_4$, а неравенства $(A3_i)$, $(A5_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$, остаются верными. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются условия $(B4_i)$, $i \notin \mathcal{K}_4$, $(B3_i)$, $(B5_i)$–$(B8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$. Условия $(B4_i)$, $i \in \mathcal{K}_4$, нарушаются. Введем срезающую функцию ξ в области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — полином. Поскольку условия $(B4_i)$, $i \in \mathcal{K}_4$, нарушены, при $x \in B_\delta(x^0)$ мы имеем

$$A_0 A_i u(x) \neq 0, \quad A_i A_0 u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_4.$$

Учитывая $(\overline{A4})$, при $x \in B_\delta(x^0)$ и $i \in \mathcal{K}_4$ получим

$$\begin{aligned} A_0 A_i u(x) &= a_i \Delta u(g_i(x)) = a_i \Delta u(g_1(x)), \\ A_i A_0 u(x) &= a_i (\Delta u)(g_i(x)) = a_i (\Delta u)(g_1(x)). \end{aligned}$$

Поскольку оператор A нормальный, так же, как в пункте 1 доказательства, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_0 A_1 u(x) + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} A_0 A_i u(x) = A_1 A_0 u(x) + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} A_i A_0 u(x),$$

откуда

$$\left(a_1 + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} a_i \right) \Delta u(g(x)) = \left(a_1 + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} a_i \right) (\Delta u)(g(x)).$$

Так как $1 \notin \mathcal{K}_4$, в силу условия 4.2 получим $a_1 + \sum\limits_{i \in \mathcal{K}_4} a_i \neq 0$. Поэтому имеет место уравнение (4.18). Тогда мы получим формулу (4.29) так же, как в пункте 1 доказательства.

4. В силу условия 4.3 ни одно из неравенств $(A5_i)$, $i = 2, \dots, N$, не может нарушаться на множестве с непустой внутренностью, поэтому следующее свойство не имеет места:

$$g_1(x) = g_i^{-1}(x) \quad \forall x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}, \quad i \in \mathcal{K}_5 \subset \{2, \dots, N\}, \quad \mathcal{K}_5 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A5}$}$$

5. Случаи нарушения остальных неравенств рассматриваются так же, как в пункте 2 доказательства. Действительно, пусть при $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$ имеет место одно из следующих свойств:

$$g_1^2(x) = g_i(x), \qquad i \in \mathcal{K}_6 \subset \{2, \dots, N\}, \quad \mathcal{K}_6 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A6}$}$$

$$g_1(x) = g_i g_1(x), \qquad i \in \mathcal{K}_7 \subset \{2, \dots, N\}, \quad \mathcal{K}_7 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A7}$}$$

$$g_1^{-1}(x) = g_i^{-1} g_1(x), \qquad i \in \mathcal{K}_8 \subset \{2, \dots, N\}, \quad \mathcal{K}_8 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A8}$}$$

$$g_i(x) = g_j g_1(x), \qquad (i, j) \in \mathcal{K}_9 \subset \{2, \dots, N\} \times \{2, \dots, N\}, \quad i \neq j, \quad \mathcal{K}_9 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A9}$}$$

$$g_i^{-1}(x) = g_j^{-1} g_1(x), \qquad (i, j) \in \mathcal{K}_{10} \subset \{2, \dots, N\} \times \{2, \dots, N\}, \quad i \neq j, \quad \mathcal{K}_{10} \neq \varnothing. \tag{$\overline{A10}$}$$

Другими словами, неравенства $(A6_i)$, $i \in \mathcal{K}_6$, или $(A7_i)$, $i \in \mathcal{K}_7$, или $(A8_i)$, $i \in \mathcal{K}_8$, или $(A9_{ij})$, $(i, j) \in \mathcal{K}_9$, или $(A10_{ij})$, $(i, j) \in \mathcal{K}_{10}$, нарушены при $x \in B_{2\delta}(x^0)$, причем остальные неравенства из $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$, остаются верными при $x \in B_{2\delta}(x^0)$. Выберем достаточно малое $\delta > 0$, которое удовлетворяет тем условиям $(B3_i)$–$(B8_i)$, $(B9_{ij})$ и $(B10_{ij})$, для которых соответствующие неравенства $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ остаются верными при $x \in B_{2\delta}(x^0)$. Введем срезающую функцию ξ в области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$, а $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. При $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\begin{aligned} &\text{в случае } (\overline{A6}): && A_i A_1^* u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_6; \\ &\text{в случае } (\overline{A7}): && A_1 A_i^* u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_7; \\ &\text{в случае } (\overline{A8}): && A_1^* A_i u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_8; \\ &\text{в случае } (\overline{A9}): && A_i A_j^* u(x) \neq 0, \quad (i, j) \in \mathcal{K}_9; \\ &\text{в случае } (\overline{A10}): && A_i^* A_j u(x) \neq 0, \quad (i, j) \in \mathcal{K}_{10}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 4.1 и свойства $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

в случае $(\overline{A6})$: $\quad A_iA_1^*u(x) = a_1a_i|J_{g_1^{-1}}(g_i(x))|u(g_1^{-1}g_i(x)) = a_1a_i|J_{g_1^{-1}}(g_i(x))|u(g_1(x)), \quad i \in \mathcal{K}_6;$

в случае $(\overline{A7})$: $\quad A_1A_i^*u(x) = a_1a_i|J_{g_i^{-1}}(g_1(x))|u(g_i^{-1}g_1(x)) = a_1a_i|J_{g_i^{-1}}(g_1(x))|u(g_1(x)), \quad i \in \mathcal{K}_7;$

в случае $(\overline{A8})$: $\quad A_1^*A_iu(x) = a_1a_i|J_{g_1^{-1}}(x)|u(g_ig_1^{-1}(x)) = a_1a_i|J_{g_1^{-1}}(x)|u(g_1(x)), \quad i \in \mathcal{K}_8;$

в случае $(\overline{A9})$: $\quad A_iA_j^*u(x) = a_ia_j|J_{g_j^{-1}}(g_i(x))|u(g_j^{-1}g_i(x)) = a_ia_j|J_{g_j^{-1}}(g_i(x))|u(g_1(x)), \quad (i,j) \in \mathcal{K}_9;$

в случае $(\overline{A10})$: $\quad A_i^*A_ju(x) = a_ia_j|J_{g_i^{-1}}(x)|u(g_jg_i^{-1}(x)) = a_ia_j|J_{g_i^{-1}}(x)|u(g_1(x)), \quad (i,j) \in \mathcal{K}_{10}.$

Используя равенства (4.32), отсюда получим

$$\begin{cases} A_iA_1^*u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \quad i \in \mathcal{K}_6; \qquad A_1A_i^*u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \quad i \in \mathcal{K}_7; \\ A_1^*A_iu(x)\big|_{x=x^B} = 0, \quad i \in \mathcal{K}_8; \qquad A_iA_j^*u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \quad (i,j) \in \mathcal{K}_9; \\ A_i^*A_ju(x)\big|_{x=x^B} = 0, \quad (i,j) \in \mathcal{K}_{10}. \end{cases} \tag{4.34}$$

Поскольку оператор A нормальный, таким же образом, как в пункте 1 доказательства, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

в случае $(\overline{A6})$: $\quad A_0A_1u(x) = \sum\limits_{i\in\mathcal{K}_6} A_iA_1^*u(x) + A_1A_0u(x);$

в случае $(\overline{A7})$: $\quad A_0A_1u(x) = \sum\limits_{i\in\mathcal{K}_7} A_1A_i^*u(x) + A_1A_0u(x);$

в случае $(\overline{A8})$: $\quad A_0A_1u(x) + \sum\limits_{i\in\mathcal{K}_8} A_1^*A_iu(x) = A_1A_0u(x);$

в случае $(\overline{A9})$: $\quad A_0A_1u(x) = \sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{K}_9} A_iA_j^*u(x) + A_1A_0u(x);$

в случае $(\overline{A10})$: $\quad A_0A_1u(x) + \sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{K}_{10}} A_i^*A_ju(x) = A_1A_0u(x).$

Учитывая равенства (4.34), в любом из случаев $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$ мы получим (4.33). В силу уравнения (4.19) из (4.33) получим соотношения (4.20) и (4.21). Тогда равенства (4.28) получаются так же, как и в пункте 1 доказательства. Таким образом, представление (4.29) остается верным.

6. Пусть при всех $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G_{g_1}^2$ имеет место некоторая комбинация свойств $(\overline{A3})$, $(\overline{A4})$ и $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$. Свойство $(\overline{A5})$ не выполняется, как было доказано в пункте 4 доказательства. В этом случае, объединяя пункты 2, 3 и 5 доказательства, аналогично получим равенство (4.33). В силу уравнения (4.19) получим из (4.33) соотношения (4.20) и (4.21). Тогда равенства (4.28) получаются так же, как и в пункте 1 доказательства. Таким образом, представление (4.29) остается верным.

Следовательно, преобразование g_1 имеет вид (4.29) в окрестности любой точки $x^0 \in G_{g_1}^2$.

7. В пунктах 1–6 доказательства было показано, что при выполнении условий леммы представление (4.29) имеет место в $B_\delta(x^0) \subset G_{g_1}^2$ без дополнительных ограничений. Поскольку точка $x^0 \in G_{g_1}^2$ произвольна, получим

$$g_1(x) = K_{1j}x + b_{1j}, \quad x \in G_{g_1}^{2j}, \tag{4.35}$$

где $G_{g_1}^{2j}$ — открытая связная компонента множества $G_{g_1}^2$.

Из $g_1(Q) = Q$ по определению множества $G_{g_1}^2$ вытекает $g_1(G_{g_1}^2) = G_{g_1}^2$. Следовательно, если $x \in G_{g_1}^{2j}$, то $g_1(x) \in G_{g_1}^{2m}$ для некоторого $m = m(j)$. Кроме того, поскольку множество $G_{g_1}^{2j}$ связно, индекс m не зависит от x. Таким образом,

$$g_1^2(x) = K_{1m}K_{1j}x + K_{1m}b_{1j} + b_{1m}, \quad x \in G_{g_1}^{2j}. \tag{4.36}$$

Сначала предположим, что $G_{g_1}^2 = Q$. Тогда j принимает единственное значение $j = 1$. Предположим, что $K_{1,1}^2 = E$. Тогда $g_1^2(x) = x + K_{1,1}b_{1,1} + b_{1,1}$ при $x \in Q$. Отсюда $K_{1,1}b_{1,1} + b_{1,1} = 0$.

Следовательно, $g_1^2(x) = x$ при $x \in Q$. Это противоречит условию $G_{g_1}^2 = Q$. Таким образом, если $G_{g_1}^2 = Q$, то $g_1(x)$ имеет вид (4.17), где $K_1 = K_{1,1}$ и $K_1^2 \neq E$.

Теперь предположим, что $\widehat{G}_{g_1}^2 \neq \varnothing$. Тогда $\partial G_{g_1}^2 \cap Q = \partial \widehat{G}_{g_1}^2 \cap Q$. Рассмотрим множество $\partial G_{g_1}^2 \cap Q$. Выберем точку $z \in \partial G_{g_1}^{2j} \cap Q$. Переходя в равенстве (4.36) к пределу при $x \to z$ $(x \in G_{g_1}^{2j})$, получим

$$K_{1m}K_{1j}z + K_{1m}b_{1j} + b_{1m} = z. \tag{4.37}$$

Если $K_{1m}K_{1j} = E$, то $K_{1m}b_{1j} + b_{1m} = 0$. Отсюда $g_1^2(x) = x$ при $x \in G_{g_1}^{2j}$. Это противоречит определению множества $G_{g_1}^{2j}$. Следовательно, множество $\partial G_{g_1}^{2j} \cap Q$ принадлежит гиперплоскости размерности $r \leqslant n-1$, где r — кратность собственного значения $\lambda = 1$ матрицы $K_{1m}K_{1j} \neq E$. (В случае $r = n$ мы получили бы $K_{1m}K_{1j} = E$, поскольку матрица $K_{1m}K_{1j}$ ортогональна.) Если $\lambda = 1$ не является собственным значением матрицы $K_{1m}K_{1j}$, то множество $\partial G_{g_1}^{2j} \cap Q$ состоит из одной точки. Согласно исходному предположению, $g_1 \in C^3$. С другой стороны, $g_1^2(x)$ — кусочно-аффинная функция в Q. Следовательно, $\widehat{G}_{g_1}^2 \subset \partial G_{g_1}^2$. Таким образом, $g_1(x)$ также является кусочно-аффинной функцией в Q. Следовательно, $g_1(x)$ имеет вид (4.17) при всех $x \in Q$. Более того, поскольку $K_{1j} = K_{1m} = K_1$, получим, что $r \leqslant n-2$ и множество $G_{g_1}^2$ состоит из одной компоненты связности[1]. $\square$

Пример 4.2. Рассмотрим пример, показывающий, что условие 4.3 существенно в лемме 4.4. При $N = 2$ рассмотрим оператор $A = A_0 + A_1 + A_2$. Положим $a_1 = a_2 = a$. Выберем взаимно-однозначное преобразование g_1 такое, что $g_1(Q) = Q$ и $|J_{g_1}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$. Тогда $|J_{g_1^{-1}}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$. Положим $g_2(x) \equiv g_1^{-1}(x)$, $x \in Q$. Тогда $g_2(Q) = Q$ и $|J_{g_2}(x)| \equiv |J_{g_2^{-1}}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$. Применяя лемму 4.1, для любых $v \in \mathcal{D}(A)$ и почти всех $x \in Q$ мы получим

$$A^*v(x) = A_0^*v(x) + A_1^*v(x) + A_2^*v(x) = \Delta v(x) + a|J_{g_1^{-1}}(x)|v(g_1^{-1}(x)) + a|J_{g_2^{-1}}(x)|v(g_2^{-1}(x) =$$
$$= \Delta v(x) + av(g_2(x)) + av(g_1(x)) = Av(x).$$

Оператор A является самосопряженным, следовательно, нормальным. Покажем, что преобразования g_1 и g_2 могут не принадлежать классу (4.17). Действительно, положим $n = 2$ и в единичном шаре $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ рассмотрим преобразование *квазиповорота*

$$g : (r, \varphi) \mapsto (r, \hat{g}(r, \varphi)),$$

где r и φ — полярные координаты, соответствующие координатам (x_1, x_2). Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

легко показать, что $|J_g(r,\varphi)| = \left|\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\hat{g}(r,\varphi)\right|$. Положим

$$\hat{g}(r, \varphi) = \varphi + r^2.$$

Тогда $|J_g(r, \varphi)| \equiv 1$. Очевидно, что преобразование g взаимно-однозначно, $g(Q) = Q$, а обратное преобразование $g^{-1}(x)$ определяется функцией $\hat{g}(r,\varphi) = \varphi - r^2$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $g \in C^3$.

Положим $g_1 = g$ и $g_2 = g^{-1}$. Таким образом, преобразования g_1 и $g_2 = g_1^{-1}$ удовлетворяют всем условиям леммы 4.4, кроме условия 4.3. Они не имеют вид (4.17) несмотря на то, что оператор A нормальный.

Замечание 4.3. Легко доказать, что вводя в примере 4.2 преобразования $g_3, \ldots, g_N$ поворота в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие всем условиям леммы 4.4, включая условие 4.3, мы получим нормальный оператор A с преобразованиями g_1 и g_2, построенными в примере 4.2. Это показывает, что и в

---

[1] Докажем, что $r \leqslant n-2$. Пусть матрица K_1 имеет спектр $\sigma(K_1) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\lambda_i\}$, где $|\lambda_i| = 1$ вследствие ортогональности матрицы. Тогда $\sigma(K_1^2) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\lambda_i^2\}$. Поскольку $K_1^2 \neq E$, $\exists \lambda_s^2 \neq 1$, т. е. $\exists \lambda_s \neq \pm 1$. Это значит, что $\operatorname{Im}\lambda_s \neq 0$, следовательно, $\exists \lambda_m = \bar{\lambda}_s$ (так как K_1 вещественна) и $\lambda_m^2 \neq 1$. Таким образом, существуют два собственных значения матрицы K_1^2, не равные 1, откуда $r \leqslant n-2$.

таком случае условие 4.3 является существенным в лемме 4.4. Более того, мы получим такой же результат для аналогичных преобразований поворота и квазиповорота вокруг одной оси в $\mathbb{R}^n$.

Предложение 4.5. *Пусть числа* $C_1, \ldots, C_N \in \mathbb{R}$ *отличны от нуля и удовлетворяют условию* 4.2:

$$\forall \mathcal{K} \subset \{1, \ldots, N\} \quad \sum_{i \in \mathcal{K}} C_i \neq 0 \quad \textit{при} \quad \mathcal{K} \neq \varnothing. \tag{4.38}$$

Пусть $\overline{Q} \subset V \subset \mathbb{R}^n$ *и непрерывные отображения* $f_1, \ldots, f_N, h_1, \ldots, h_N : V \to V$ *такие, что* $f_1(Q), \ldots, f_N(Q), h_1(Q), \ldots, h_N(Q) \subset Q$, *для любого* $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ *и любого* $x \in Q$ *удовлетворяют уравнению*

$$\sum_{i=1}^{N} C_i u(f_i(x)) = \sum_{i=1}^{N} C_i u(h_i(x)). \tag{4.39}$$

Тогда

1. $\forall x \in Q$ *следующие множества точек совпадают*[1]: $\{f_1(x), \ldots, f_N(x)\} = \{h_1(x), \ldots, h_N(x)\}$;
2. *если* $f_i(x^0) \neq f_j(x^0)$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j)$ *при некотором* $x^0 \in Q$, *то из равенства* $f_m(x^0) = h_l(x^0)$ *следует, что* $C_m = C_l$;
3. *пусть* $f_m(x^0) = h_l(x^0)$ *при некотором* $x^0 \in Q$. *Обозначим* $\mathcal{K}_f^m = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N,\ f_i(x^0) = f_m(x^0)\}$, $\mathcal{K}_h^l = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N,\ h_i(x^0) = h_l(x^0)\}$. *Тогда*

$$\sum_{i \in \mathcal{K}_f^m} C_i = \sum_{i \in \mathcal{K}_h^l} C_i. \tag{4.40}$$

Доказательство. Первое утверждение не означает, что множества функций $\{f_1, \ldots, f_N\}$ и $\{h_1, \ldots, h_N\}$ совпадают. Например, первое утверждение выполнено для функций $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = -x_1$ и $h_1(x) = |x_1|$, $h_2(x) = -|x_1|$ при любых $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Предположим, что первое утверждение неверно. Тогда для некоторого $x^0 \in Q$ имеет место $\{f_1(x^0), \ldots, f_N(x^0)\} \neq \{h_1(x^0), \ldots, h_N(x^0)\}$. Без ограничения общности предположим, что

$$S(x^0) = \{f_1(x^0), \ldots, f_N(x^0)\} \setminus \{h_1(x^0), \ldots, h_N(x^0)\} \neq \varnothing.$$

Рассмотрим любую точку $f_{k_1}(x^0) \in S(x^0)$. В общем случае $\{k_1\} \subseteq \mathcal{K}_f^{k_1}$, где $\mathcal{K}_f^{k_1} = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N,\ f_i(x^0) = f_{k_1}(x^0)\}$. Пусть $B_\delta(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \delta\}$. Обозначим

$$U_\delta = \bigcup_{i \in \mathcal{K}_f^{k_1}} f_i(B_\delta(x^0)).$$

Поскольку отображения $f_1, \ldots, f_N$ и $h_1, \ldots, h_N$ непрерывны, существует $\delta > 0$ такое, что $f_i(x) \in S(x)$ для всех $i \in \mathcal{K}_f^{k_1}$ при любом $x \in B_{2\delta}(x^0)$ и

$$U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^{N} h_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing, \qquad U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{i \notin \mathcal{K}_f^{k_1}} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing.$$

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ для любого $x \in Q$, $\xi(x) = 1$ при $x \in U_\delta$, $\operatorname{supp} \xi \subset U_{2\delta}$. Полагая $u = \xi$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$C_1 u(f_1(x)) + \ldots + C_N u(f_N(x)) = \sum_{i \in \mathcal{K}_f^{k_1}} C_i, \qquad C_1 u(h_1(x)) + \ldots + C_N u(h_N(x)) = 0.$$

В силу условия (4.38) это противоречит уравнению (4.39), откуда следует справедливость первого утверждения.

2. Докажем второе утверждение. Из первого утверждения следует, что если $f_i(x^0) \neq f_j(x^0)$ при некотором $x^0 \in Q$ для всех $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j)$, то $h_i(x^0) \neq h_j(x^0)$ для всех $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j)$. Рассмотрим некоторую функцию f_m, $1 \leqslant m \leqslant N$. В силу первого утверждения существует единственная функция h_l такая, что $f_m(x^0) = h_l(x^0)$, $1 \leqslant l \leqslant N$. Обозначим

[1] Если некоторые точки участвуют в записи больше одного раза, то такая запись определяет одно и то же множество, например: $\{1, 1, 2\} = \{2, 2, 1\} = \{1, 2\}$.

$U_\delta = f_m(B_\delta(x^0)) \cup h_l(B_\delta(x^0))$. Поскольку отображения $f_1, \dots, f_N$ и $h_1, \dots, h_N$ непрерывны, существует такое число $\delta > 0$, что

$$U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{N} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing, \qquad U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{N} h_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing.$$

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при всех $x \in Q$, $\xi(x) = 1$ при $x \in U_\delta$ и $\operatorname{supp} \xi \subset U_{2\delta}$. Полагая $u = \xi$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$C_1 u(f_1(x)) + \ldots + C_N u(f_N(x)) = C_m, \qquad C_1 u(h_1(x)) + \ldots + C_N u(h_N(x)) = C_l.$$

Из равенства (4.39) получим $C_m = C_l$, что доказывает второе утверждение.

3. Третье утверждение является простым обобщением второго. Обозначим

$$U_\delta = \bigcup_{i\in\mathcal{K}_f^m} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \cup \bigcup_{i\in\mathcal{K}_h^l} h_i(B_{2\delta}(x^0)).$$

Выберем $\delta > 0$ достаточно малым, чтобы

$$U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\notin\mathcal{K}_f^m}}^{N} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing, \qquad U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\notin\mathcal{K}_h^l}}^{N} h_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing.$$

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при всех $x \in Q$, $\xi(x) = 1$ при $x \in U_\delta$ и $\operatorname{supp} \xi \subset U_{2\delta}$. Полагая $u = \xi$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$C_1 u(f_1(x)) + \ldots + C_N u(f_N(x)) = \sum_{i\in\mathcal{K}_f^m} C_i, \qquad C_1 u(h_1(x)) + \ldots + C_N u(h_N(x)) = \sum_{i\in\mathcal{K}_h^l} C_i.$$

Из равенства (4.39) получим (4.40), что доказывает третье утверждение. $\square$

Лемма 4.5. *Пусть* $G_{g_i}^2 \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. *Если оператор* A *нормальный и выполнены условия* 4.2, 4.3 *и* 4.4, *то*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x) \quad \forall x \in Q, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Доказательство. Предположения этой леммы повторяют предположения леммы 4.4 с добавлением условия 4.4.

В силу леммы 4.4 преобразования $g_1, \dots, g_N$ имеют вид (4.17).

По определению, $\mathcal{D}(A) = \{u \in \tilde{W}_2^2(Q) : Bu = 0\}$. Следовательно, поскольку $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, и преобразования $g_1 \dots, g_N$ имеют вид (4.17), получим $A_1 u, \dots, A_N u \in \mathcal{D}(A)$, $A_1^* u, \dots, A_N^* u \in \mathcal{D}(A)$ при $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы [8, теорема 5.1, раздел 5, глава 2] получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in \tilde{W}_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

Вследствие нормальности оператора A для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ имеем

$$(A_0 + A_1 + \ldots + A_N)(A_0 + A_1^* + \ldots + A_N^*)u = (A_0 + A_1^* + \ldots + A_N^*)(A_0 + A_1 + \ldots + A_N)u. \quad (4.41)$$

Из соотношений (4.17) следует, что равенства (4.20), (4.21) тождественно выполняются в Q для всех преобразований $g_1, \dots, g_N$. Тогда, записывая равенство (4.19) для каждого преобразования $g_1, \dots, g_N$, для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$A_0 A_i u = A_i A_0 u, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.42)$$

С другой стороны, $g_i^{-1}(y) = K_i^{-1} y - K_i^{-1} b_i$, $i = 1, \dots, N$. Поскольку матрицы K_i^{-1} также ортогональны, из равенств (4.20), (4.21), записанных для обратных преобразований $g_1^{-1}, \dots, g_N^{-1}$, и тождеств $|J_{g_i^{-1}}(x)| \equiv 1$ для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$A_0 A_i^* u = A_i^* A_0 u, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.43)$$

Учитывая уравнения (4.42) и (4.43), из равенства (4.41) для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$(A_1 + \ldots + A_N)(A_1^* + \ldots + A_N^*)u = (A_1^* + \ldots + A_N^*)(A_1 + \ldots + A_N)u.$$

Применяя лемму 4.1 и тождества $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $i = 1, \dots, N$, для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} a_i a_j \big(u(g_i^{-1} g_j(x)) + u(g_j^{-1} g_i(x))\big) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} a_i a_j \big(u(g_i g_j^{-1}(x)) + u(g_j g_i^{-1}(x))\big). \tag{4.44}$$

В терминах предложения 4.5 равенство (4.44) содержит функции $f_1 = g_1^{-1} g_2$, $f_2 = g_2^{-1} g_1$, ..., $f_{N(N-1)} = g_N^{-1} g_{N-1}$ в левой части, функции $h_1 = g_1 g_2^{-1}$, $h_2 = g_2 g_1^{-1}$, ..., $h_{N(N-1)} = g_N g_{N-1}^{-1}$ в правой части и коэффициенты $C_1 = C_2 = a_1 a_2$, $C_3 = C_4 = a_1 a_3$, ..., $C_{N(N-1)-1} = C_{N(N-1)} = a_{N-1} a_N$. Из условия 4.4 следует, что условие (4.38) выполнено. Тогда согласно первому утверждению предложения 4.5 для любого $x \in Q$ имеет место $\{f_1(x), \dots, f_{N(N-1)}(x)\} = \{h_1(x), \dots, h_{N(N-1)}(x)\}$. С другой стороны, в силу условия 4.4 равенство (4.40) выполняется только в случае $p = q$ и $\{C_{m_1}, \dots, C_{m_p}\} = \{C_{l_1}, \dots, C_{l_p}\}$ (в отличие от первого утверждения предложения 4.5, здесь имеется в виду строгое совпадение множеств). Таким образом, для любых $i, j = 1, \dots, N$ и $x \in Q$ верна по крайней мере одна из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} g_i^{-1} g_j(x) = g_i g_j^{-1}(x), \\ g_j^{-1} g_i(x) = g_j g_i^{-1}(x), \end{cases} \tag{4.45}$$

$$\begin{cases} g_i^{-1} g_j(x) = g_j g_i^{-1}(x), \\ g_j^{-1} g_i(x) = g_i g_j^{-1}(x). \end{cases} \tag{4.46}$$

Как было показано в замечании 4.2, из системы (4.45) следует $g_i^2(x) = g_j^2(x)$, а из системы (4.46) следует $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$.

Докажем, что для любых $i, j = 1, \dots, N$ по крайней мере одно из равенств $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ и $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ выполнено для всех $x \in Q$. Действительно, поскольку преобразования $g_1, \dots, g_N$ имеют вид (4.17), каждое рассматриваемое равенство в координатной форме являются системой линейных уравнений. Решением такой системы является гиперплоскость размерности $n-r$, где r — ранг матрицы системы. Очевидно, что если каждая точка $x \in Q$ является решением по крайней мере одной из двух систем линейных уравнений, то по крайней мере одна система имеет матрицу нулевого ранга. Следовательно, хотя бы одно из равенств $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ и $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ выполняется тождественно в Q.

Докажем, что для любых $i, j = 1, \dots, N$ из тождества $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ $(x \in Q)$ следует тождество $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ $(x \in Q)$. Действительно, поскольку g_i и g_j имеют вид (4.17), из тождества $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ $(x \in Q)$ следует $K_i^2 = K_j^2$. Так как матрица K_i^2 ортогональна, она может быть записана в виде $K_i^2 = S_i^{-1} U_i S_i$, где S_i — некоторая ортогональная матрица, $\det S_i \neq 0$, а матрица $U_i = \operatorname{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})$ — диагональная с собственными значениями матрицы K_i^2 на главной диагонали, причем $|\lambda_{ik}| = 1$, $k = 1, \dots, n$. Матрица U_i определена с точностью до перестановки диагональных элементов, а матрица S_i определена с точностью до перестановки строк. Положим $Q_i = S_i^{-1} V_i S_i$, где $V_i = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_{i1}}, \sqrt{\lambda_{i2}}, \dots, \sqrt{\lambda_{in}})$. Очевидно, что $Q_i^2 = K_i^2$ и Q_i — ортогональная матрица, определенная с точностью до выбора одного из пары значений каждого из корней $\sqrt{\lambda_{i1}}, \dots, \sqrt{\lambda_{in}}$. Докажем, что не существует других ортогональных матриц с квадратами, равными K_i^2. Действительно, предположим, что существует такая ортогональная матрица P_i, что $P_i \neq Q_i$ и $P_i^2 = K_i^2$. Тогда $P_i = T_i^{-1} W_i T_i$, где $W_i = \operatorname{diag}(\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{in})$, $|\mu_{ik}| = 1$, $k = 1, \dots, n$. Отсюда $P_i^2 = T_i^{-1} \operatorname{diag}(\mu_{i1}^2, \mu_{i2}^2, \dots, \mu_{in}^2) T_i = K_i^2$. Поскольку представление $K_i^2 = S_i^{-1} U_i S_i$ единственно с точностью до перестановки диагональных элементов матрицы U_i и строк матрицы S_i, отсюда следует, что $\{\mu_{i1}^2, \mu_{i2}^2, \dots, \mu_{in}^2\} = \{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}\}$ и матрицы T_i и S_i совпадают с точностью до перестановки строк. Следовательно, $P_i = Q_i$. Таким образом, из равенства $K_i^2 = K_j^2$ следуют представления $K_i = S_i^{-1} \operatorname{diag}(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in}) S_i$ и $K_j = S_i^{-1} \operatorname{diag}(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in}) S_i$, где $\gamma_{ik}^2 = \delta_{ik}^2 = \lambda_{ik}$, $k = 1, \dots, n$. Отсюда $K_i K_j = K_j K_i$. Тогда из соотношений (4.17) получим $g_i g_j(x) = g_j g_i(x) + h$ для всех $x \in Q$, где $h = K_i b_j + b_i - (K_j b_i + b_j)$. Поскольку $g_i g_j(Q) = g_j g_i(Q) = Q$, получим $h = 0$ и $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ для всех $x \in Q$. □

Пример 4.3. Преобразованиями вида (4.17), удовлетворяющими тождеству $gf(x) = fg(x)$, являются преобразования поворота вокруг одной оси в $\mathbb{R}^3$. Тождества $gf(x) = fg(x)$ и $g^2(x) = f^2(x)$ одновременно выполняются для преобразований поворота вокруг одной оси в $\mathbb{R}^3$ на углы α и $\pi + \alpha$.

Лемма 4.6. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, N$. *Если преобразования* $g_1, \ldots, g_N$ *имеют вид* (4.17) *и равенства* $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$, *выполнены для всех* $x \in Q$, *то оператор* A *нормальный.*

Доказательство. По определению, $\mathcal{D}(A) = \{u \in \tilde{W}^2_2(Q) : Bu = 0\}$. Следовательно, поскольку $g_i(Q) = Q$ и преобразования $g_1, \ldots, g_N$ имеют вид (4.17), получим $A_1 u, \ldots, A_N u \in \mathcal{D}(A)$, $A_1^* u, \ldots, A_N^* u \in \mathcal{D}(A)$ при $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы [8, теорема 5.1, раздел 5, глава 2] получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in \tilde{W}^4_2(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

Поскольку преобразования $g_1, \ldots, g_N$ имеют вид (4.17), условие (4.12) леммы 4.3 выполняется. Справедливость условия (4.13) леммы 4.3 следует из соотношений $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ для всех $x \in Q$, $i, j = 1, \ldots, N$. Тогда в силу леммы 4.3 оператор $A_1 + \ldots + A_N$ нормальный. Следовательно, достаточно доказать, что для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ выполнено равенство

$$A_0(A_1 + \ldots + A_N)u + (A_1^* + \ldots + A_N^*)A_0 u = (A_1 + \ldots + A_N)A_0 u + A_0(A_1^* + \ldots + A_N^*)u. \quad (4.47)$$

Таким же образом, как в доказательстве леммы 4.5, получим (4.42) и (4.43), откуда следует (4.47). □

Пример 4.4. Рассмотрим пример, показывающий, что условие 4.2 существенно в лемме 4.4. Выберем $a_1, \ldots, a_N$ так, чтобы при некотором $\mathcal{K} \subset \{1, \ldots, N\}$ выполнялось $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} a_i = 0$. Рассмотрим такие преобразования $g_1, \ldots, g_N$, что $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ и $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, N$. Положим $g_i = g$ для всех $i \in \mathcal{K}$, где $g(x)$ — некоторое *не аффинное* преобразование. В любом случае мы получим

$$Au(x) = \Delta u + \sum_{i \notin \mathcal{K}} a_i u(g_i(x)).$$

Пусть преобразования g_i, $i \notin \mathcal{K}$, имеют вид (4.17) и являются вращениями вокруг одной оси в $\mathbb{R}^n$. Тогда преобразования g_i, $i \notin \mathcal{K}$, удовлетворяют всем условиям леммы 4.6, следовательно, в силу этой леммы оператор A нормальный. Выбирая не равные по модулю углы вращения и подходящее преобразование $g(x)$, добьемся выполнения условия 4.3 в лемме 4.4.

Таким образом, все предположения леммы 4.4, кроме условия 4.2, выполнены, а преобразования $g_i = g$, $i \in \mathcal{K}$, не имеют вид (4.17).

Пример 4.5. Рассмотрим пример, показывающий, что условие коммутативности преобразований $g_1, \ldots, g_N$ существенно в лемме 4.6. Рассмотрим область Q, оператор A и преобразования g_1 и g_2, введенные в примере 4.1. В таком случае выполняются все условия леммы 4.6, кроме условия коммутативности. Из доказательства леммы 4.6 следует, что нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора $A_1 + A_2$ для любых $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Положим $u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)\xi(x)$, где $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ — срезающая функция такая, что $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$ при $x \in Q_{2\varepsilon}$ и $\xi(x) = 0$ при $x \notin Q_\varepsilon$. (Здесь $Q_\varepsilon \subset Q$, $\operatorname{dist}(\partial Q_\varepsilon, \partial Q) = \varepsilon$.) Очевидно, что $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Поскольку выполняются все условия леммы 4.3, кроме условия (4.13), в силу примера 4.1 получим, что оператор $A_1 + A_2$ нормален тогда и только тогда, когда равенство (4.16) выполнено при почти всех $x \in Q$. Выбирая $x^0 = (0,\ 0,\ 1)^T$ и учитывая вычисления из примера 4.1, мы видим, что равенство (4.16) нарушается, по крайней мере, в окрестности точки x^0. Следовательно, при таких условиях оператор A не является нормальным.

Доказательство теоремы 4.1 следует из лемм 4.4, 4.5 и 4.6.

4.6. Доказательство теоремы 4.2.

Лемма 4.7. *Пусть* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = 1, \ldots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, N$, *и если оператор* A *нормальный и выполнено хотя бы одно из условий* 4.2, 4.3, *то*

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \ldots, N. \quad (4.48)$$

Доказательство. Из условия $G^2_{g_i} = \varnothing$ в силу леммы 4.2 получим $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, N$.

Чтобы доказать равенства (4.48), применим метод, использованный в доказательстве леммы 4.4. Приведем доказательство для преобразования g_1 (преобразования $g_2, \ldots, g_N$ рассматриваются аналогично). Выберем точку $x^0 \in Q$. Отметим, что поскольку $G^2_{g_i} = \varnothing$, имеет место равенство

$g_i^{-1}(x) \equiv g_i(x)$ для всех $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$. Следовательно, свойства $(A3_i)$ и $(A6_i)$ совпадают, так же как и свойства $(A4_i)$ и $(A5_i)$, $(A7_i)$ и $(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$. Обозначим их как $(A3_i{,}A6_i)$, $(A4_i{,}A5_i)$, $(A7_i{,}A8_i)$ и $(A9_{ij}{,}A10_{ij})$.

1. Пусть при $x = x^0$ выполнены условия $(A1)$, $(A3_i{,}A6_i)$, $(A4_i{,}A5_i)$, $(A7_i{,}A8_i)$ и $(A9_{ij}{,}A10_{ij})$, $i,j = 2,\dots,N$ $(i \neq j)$. Условие $(A2)$ не выполняется, так как $g_i^2(x) \equiv x$, $i = 1,\dots,N$. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются условия $(B1)$, $(B3_i{,}B6_i)$, $(B4_i{,}B5_i)$, $(B7_i{,}B8_i)$ и $(B9_{ij}{,}B10_{ij})$, $i,j = 2,\dots,N$ $(i \neq j)$.

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = 1$ при $x \in g_1(B_\delta(x^0))$ и $\operatorname{supp}\xi \subset g_1(B_{2\delta}(x^0))$. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — полином. Из определения $g_1,\dots,g_N$ следует $u \in \mathcal{D}(A^*A)$. Рассмотрим AA^*u и A^*Au. Используя нормальность оператора A (т. е. равенство (4.41)), определение функции u и условия $(B1)$, $(B3_i{,}B6_i)$, $(B4_i{,}B5_i)$, $(B7_i{,}B8_i)$ и $(B9_{ij}{,}B10_{ij})$, $i,j = 2,\dots,N$ $(i \neq j)$, так же, как в пункте 1 доказательства леммы 4.4 (с тем отличием, что нарушается условие $(B2)$), для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_1A_0u(x) + A_0A_1^*u(x) = A_0A_1u(x) + A_1^*A_0u(x),$$

где

$$\begin{aligned}
&A_1A_0u(x) = a_1(\Delta u)(g_1(x)),\\
&A_0A_1u(x) = a_1\Delta\big(u(g_1(x))\big),\\
&A_0A_1^*u(x) = a_1\Delta\left(\left|J_{g_1^{-1}}(x)\right| u(g_1^{-1}(x))\right) = a_1\Delta\left(|J_{g_1}(x)|\, u(g_1(x))\right),\\
&A_1^*A_0u(x) = a_1\left|J_{g_1^{-1}}(x)\right|(\Delta u)(g_1^{-1}(x)) = a_1|J_{g_1}(x)|(\Delta u)(g_1(x)).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta\Big(\big(|J_{g_1}(x)|-1\big)u(g_1(x))\Big) = \big(|J_{g_1}(x)|-1\big)(\Delta u)(g_1(x)), \quad x \in B_\delta(x^0).$$

Используя формулу

$$\Delta[v(x)w(x)] = \Delta v(x)w(x) + 2(\nabla v(x), \nabla w(x)) + v(x)\Delta w(x),$$

для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\big(|J_{g_1}(x)|-1\big)\Delta u(g_1(x)) + \sum_{i=1}^n\left(2\frac{\partial|J_{g_1}(x)|}{\partial x_i}\frac{\partial u(g_1(x))}{\partial x_i} + \frac{\partial^2|J_{g_1}(x)|}{\partial x_i^2}u(g_1(x))\right) = \big(|J_{g_1}(x)|-1\big)(\Delta u)(g_1(x)).$$

Пусть $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$, где $k,m = 1,\dots,n$ и $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Учитывая равенства (4.32), получим

$$\Big(\big(|J_{g_1}(x)|-1\big)\Delta u(g_1(x))\Big)\Big|_{x=x^B} = \Big(\big(|J_{g_1}(x)|-1\big)(\Delta u)(g_1(x))\Big)\Big|_{x=x^B}. \tag{4.49}$$

Следовательно, имеет место либо $|J_{g_1}(x^B)| = 1$, либо

$$\Delta u(g_1(x))\Big|_{x=x^B} = (\Delta u)(g_1(x))\Big|_{x=x^B}.$$

Поскольку точка $x^B \in B_\delta(x^0)$ произвольна, в первом случае мы получим

$$|J_{g_1}(x)| = 1 \quad \forall x \in B_\delta(x^0). \tag{4.50}$$

Во втором случае, используя равенство (4.19), получим (4.20) и (4.21). Тогда из (4.22) получим (4.50) так же, как в пункте 1 доказательства леммы 4.4.

2. Как было указано в доказательстве леммы 4.4, в силу условия $|J_{g_1}(x)| \in C^2(\overline{Q})$ достаточно рассмотреть случаи, когда условия $(A1)$, $(A3_i{,}A6_i)$, $(A4_i{,}A5_i)$, $(A7_i{,}A8_i)$ и $(A9_{ij}{,}A10_{ij})$ нарушаются на множествах с непустой внутренностью.

Прежде всего отметим, что если условие $(A1)$ нарушается для любого $x \in B_\delta(x^0)$, т. е. $g_1(x) = x$ в $B_\delta(x^0)$, то равенство (4.50) выполняется тривиальным образом.

3. Если выполнено условие 4.3, то условия $(A4_i{,}A5_i)$, $i = 2,\dots,N$, не могут нарушаться на множествах с непустой внутренностью.

Пусть выполнено условие 4.2 и некоторые из условий ($A4_i$,$A5_i$), $i = 2,\dots,N$, нарушаются в окрестности точки x^0:

$$\begin{cases} g_1(x) = g_i(x), \\ g_1(x) = g_i^{-1}(x) \end{cases} \quad \forall x \in B_{2\delta}(x^0), \quad i \in \mathcal{K}_{45} \subset \{2,\dots,N\}, \quad \mathcal{K}_{45} \neq \varnothing, \tag{$\overline{A4,A5}$}$$

причем остальные условия ($A4_i$,$A5_i$), $i \notin \mathcal{K}_{45}$, выполняются при $x \in B_{2\delta}(x^0)$, а условия ($A1$), ($A3_i$,$A6_i$), ($A7_i$,$A8_i$) и ($A9_{ij}$,$A10_{ij}$), $i,j = 2,\dots,N$ ($i \neq j$), сохраняются. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются условия ($B1$), ($B4_i$,$B5_i$), $i \notin \mathcal{K}_{45}$, ($B3_i$,$B6_i$), ($B7_i$,$B8_i$) и ($B9_{ij}$,$B10_{ij}$), $i,j = 2,\dots,N$ ($i \neq j$). Условия ($B4_i$,$B5_i$), $i \in \mathcal{K}_{45}$, нарушаются. Введем срезающую функцию ξ в области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$ и $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Поскольку нарушены условия ($B4_i$,$B5_i$), $i \in \mathcal{K}_{45}$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_0A_iu(x) \neq 0, \quad A_iA_0u(x) \neq 0, \quad A_0A_i^*u(x) \neq 0, \quad A_i^*A_0u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_{45}.$$

Учитывая соотношения ($\overline{A4,A5}$), при $i \in \mathcal{K}_{45}$ для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\begin{aligned} &A_0A_iu(x) = a_i\Delta u(g_i(x)) = a_i\Delta u(g_1(x)), \\ &A_iA_0u(x) = a_i(\Delta u)(g_i(x)) = a_i(\Delta u)(g_1(x)), \\ &A_0A_i^*u(x) = a_i\Delta\left(\left|J_{g_i^{-1}(x)}\right| u(g_i^{-1}(x))\right) = a_i\Delta(|J_{g_1(x)}|u(g_1(x))), \\ &A_i^*A_0u(x) = a_i\left|J_{g_i^{-1}(x)}\right|(\Delta u)(g_i^{-1}(x)) = a_i|J_{g_1(x)}|(\Delta u)(g_1(x)). \end{aligned}$$

Поскольку оператор A нормальный, так же, как в пункте 1 доказательства, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\sum_{i\in\mathcal{K}_{45}\cup\{1\}} (A_0A_iu(x) + A_0A_i^*u(x)) = \sum_{i\in\mathcal{K}_{45}\cup\{1\}} (A_iA_0u(x) + A_i^*A_0u(x)).$$

Преобразуя это уравнение так же, как в пункте 1 доказательства, учитывая предыдущие соотношения и (4.32), получим

$$\left(\sum_{i\in\mathcal{K}_{45}\cup\{1\}} a_i\right)\Big((|J_{g_1}(x)|-1)\Delta u(g_1(x))\Big)\Big|_{x=x^B} = \left(\sum_{i\in\mathcal{K}_{45}\cup\{1\}} a_i\right)\Big((|J_{g_1}(x)|-1)(\Delta u)(g_1(x))\Big)\Big|_{x=x^B}.$$

Поскольку $1 \notin \mathcal{K}_{45}$, в силу условия 4.2 получим равенство (4.49). Тогда равенство (4.50) следует аналогичным образом.

4. Если условия ($A3_i$,$A6_i$), ($A7_i$,$A8_i$) и ($A9_{ij}$,$A10_{ij}$) нарушаются в некоторой комбинации, то такой случай рассматривается так же, как в пунктах 5, 6 доказательства леммы 4.4. Единственное отличие в том, что теперь условие ($B2$) не выполняется. В результате, используя соотношения (4.32), будем иметь

$$(A_1A_0u(x) + A_0A_1^*u(x))\big|_{x=x^B} = (A_0A_1u(x) + A_1^*A_0u(x))\big|_{x=x^B},$$

откуда получим равенство (4.49) и, следовательно, (4.50).

Таким образом, имеет место $|J_{g_1}(x)| = 1$ при почти всех $x \in Q$. Поскольку $|J_{g_1}(x)| \in C^2(\overline{Q})$, получим $|J_{g_1}(x)| = 1$ для любого $x \in Q$. □

Лемма 4.8. *Пусть* $G_{g_i}^2 = \varnothing$, $i = 1,\dots,N$. *Если*

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1,\dots,N,$$

то оператор A самосопряженный.

Доказательство. Из предположений леммы следует, что $g_i(x) = g_i^{-1}(x)$, $x \in Q$, $i = 1,\dots,N$. С помощью леммы 4.1 получим $A_i = A_i^*$, $i = 1,\dots,N$. Поскольку оператор A_0 самосопряженный, оператор A также самосопряженный. В частности, оператор A является нормальным. □

Доказательство теоремы 4.2 следует из лемм 4.7 и 4.8.

4.7. Доказательство теоремы 4.3.

Лемма 4.9. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, M$, *а также* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \ldots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \ldots, N$. *Если при этом оператор* A *нормальный и выполнены условия* 4.2^M *и* 4.3, *то*

1. $g_i(x) = K_i x + b_i$, $x \in Q$, *где* K_i — *ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, M$;
2. $|J_{g_i}(x)| = 1,\ x \in Q,\ i = M+1, \ldots, N$.

Доказательство. Поскольку $G^2_{g_i} = \varnothing$, из леммы 4.2 следует $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \ldots, N$.

Докажем первое утверждение леммы. Приведем доказательство для преобразования g_1 (преобразования $g_2, \ldots, g_M$ рассматриваются аналогично). Как и в доказательстве леммы 4.4, выберем точку $x^0 \in G^2_{g_1}$. В этой точке выполнены условия $(A1)$ и $(A2)$. Существует окрестность $B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$, удовлетворяющая свойствам $(B1)$ и $(B2)$.

1. Так же, как в пункте 1 доказательства леммы 4.4, предположим, что условия $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ выполняются в точке x^0, следовательно, существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются свойства $(B3_i)$–$(B8_i)$, $(B9_{ij})$ и $(B10_{ij})$, $i, j = 2, \ldots, N$ $(i \neq j)$. Поскольку $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \ldots, N$, имеем $g_i(x) \equiv g_i^{-1}(x)$, $x \in Q$, $i = M+1, \ldots, N$. Следовательно, условия $(A4_i)$ и $(A5_i)$ совпадают при $i = M+1, \ldots, N$ а также условия $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ совпадают при $i, j = M+1, \ldots, N$ $(i \neq j)$. Таким образом, свойства $(B4_i)$ и $(B5_i)$, $(B9_{ij})$ и $(B10_{ij})$ совпадают при $i, j = M+1, \ldots, N$ $(i \neq j)$.

Справедливы все дальнейшие рассуждения из пункта 1 доказательства леммы 4.4. В соответствии с ними преобразование g_1 оказывается аффинным в окрестности $B_\delta(x^0)$ точки x^0 и удовлетворяет соотношению (4.29).

2. Как и в доказательстве леммы 4.4, рассмотрим различные случаи нарушения условий $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ на множестве с непустой внутренностью при некоторых $i, j = 2, \ldots, N$ $(i \neq j)$.

Если имеет место случай $(\overline{A3})$, то он рассматривается так же, как в пункте 2 доказательства леммы 4.4.

Пусть выполнено соотношение $(\overline{A4})$. Имеем $\mathcal{K}_4 \subset \{1, \ldots, M\}$, так как из условия 4.3 и тождеств $g_i^{-1}(x) \equiv g_i(x)$, $i = M+1, \ldots, N$, следует, что $g_1(x) \neq g_i(x)$ при почти всех $x \in Q$, $i = M+1, \ldots, N$. Следовательно, в силу условия 4.2^M случай $(\overline{A4})$ рассматривается так же, как в пункте 3 доказательства леммы 4.4.

Условия $(A5_i)$, $i = 1, \ldots, N$, остаются выполненными в силу условия 4.3, поэтому соотношение $(\overline{A5})$ не имеет места.

Если выполнено одно из соотношений $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$, то такой случай рассматривается так же, как в пункте 5 доказательства леммы 4.4.

Любая возможная комбинация соотношений $(\overline{A3})$, $(\overline{A4})$ и $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$ рассматривается так же, как в пункте 6 доказательства леммы 4.4.

3. Из пункта 7 доказательства леммы 4.4 следует, что преобразование $g_1(x)$ имеет вид (4.17) при всех $x \in Q$. Повторяя рассуждения пунктов 1–3 настоящего доказательства для преобразований $g_2, \ldots, g_M$, получим первое утверждение леммы.

Докажем второе утверждение леммы. Приведем доказательство для преобразования g_{M+1} (преобразования $g_{M+2}, \ldots, g_N$ рассматриваются аналогично). Обозначим через $(A1)^{M+1}$, $(A2)^{M+1}$, $(A4_i)^{M+1}$–$(A8_i)^{M+1}$, $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$ условия $(A1)$, $(A2)$, $(A4_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, в которых g_1 заменено на g_{M+1}, $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j,\ i, j \neq M+1)$.

Выберем точку $x^0 \in Q$. Отметим, что поскольку $g_i^{-1}(x) \equiv g_i(x)$, $x \in Q$, $i = M+1, \ldots, N$, условия $(A3_i)$ и $(A6_i)^{M+1}$ совпадают при $i = 1, \ldots, N$. Также при $i = M+1, \ldots, N$ совпадают следующие условия: $(A4_i)^{M+1}$ и $(A5_i)^{M+1}$, $(A7_i)^{M+1}$ и $(A8_i)^{M+1}$. Кроме того, при $i, j = M+1, \ldots, N$ совпадают условия $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$.

4. Предположим, что при $x = x^0$ выполняются условия $(A1)^{M+1}$, $(A3_i)$, $(A4_i)^{M+1}$–$(A8_i)^{M+1}$, $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$, $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j,\ i, j \neq M+1)$. Условие $(A2)^{M+1}$ не выполняется, поскольку $g^2_{M+1}(x) \equiv x$. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что выполняются соответствующие

условия $(B1)^{M+1}$, $(B3_i)$, $(B4_i)^{M+1}$–$(B8_i)^{M+1}$, $(B9_{ij})^{M+1}$ и $(B10_{ij})^{M+1}$, $i,j=1,\dots,N$ ($i\neq j$, $i,j\neq M+1$).

Введем срезающую функцию $\xi\in\dot C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $0\leqslant\xi(x)\leqslant1$ при $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi(x)=1$ при $x\in g_{M+1}(B_\delta(x^0))$ и $\operatorname{supp}\xi\subset g_{M+1}(B_{2\delta}(x^0))$. Положим $u=\xi P$, где $P(x)$ — некоторый полином. По определению преобразований $g_1,\dots,g_N$ очевидно, что $u\in\mathcal{D}(A^*A)$. Рассмотрим AA^*u и A^*Au. Поскольку оператор A нормальный (т. е. выполнено равенство (4.41)), в силу определения функции u и условий $(B1)^{M+1}$, $(B3_i)$, $(B4_i)^{M+1}$–$(B8_i)^{M+1}$, $(B9_{ij})^{M+1}$ и $(B10_{ij})^{M+1}$, $i,j=1,\dots,N$ ($i\neq j$, $i,j\neq M+1$), так же, как в пункте 1 доказательства леммы 4.4 (с тем отличием, что нарушается условие $(B2)^{M+1}$), для любого $x\in B_\delta(x^0)$ получим
$$A_{M+1}A_0u(x)+A_0A^*_{M+1}u(x)=A_0A_{M+1}u(x)+A^*_{M+1}A_0u(x),$$
где
$$\begin{aligned}
&A_{M+1}A_0u(x)=a_{M+1}(\Delta u)(g_{M+1}(x)),\\
&A_0A_{M+1}u(x)=a_{M+1}\Delta\bigl(u(g_{M+1}(x))\bigr),\\
&A_0A^*_{M+1}u(x)=a_{M+1}\Delta\left(\left|J_{g^{-1}_{M+1}}(x)\right|u(g^{-1}_{M+1}(x))\right)=a_{M+1}\Delta\left(|J_{g_{M+1}}(x)|u(g_{M+1}(x))\right),\\
&A^*_{M+1}A_0u(x)=a_{M+1}\left|J_{g^{-1}_{M+1}}(x)\right|(\Delta u)(g^{-1}_{M+1}(x))=a_{M+1}|J_{g_{M+1}}(x)|(\Delta u)(g_{M+1}(x)).
\end{aligned}$$
Отсюда
$$\Delta\bigl[\bigl(|J_{g_{M+1}}(x)|-1\bigr)u(g_{M+1}(x))\bigr]=\bigl(|J_{g_{M+1}}(x)|-1\bigr)(\Delta u)(g_{M+1}(x)),\quad x\in B_\delta(x^0).$$
Используя формулу
$$\Delta[v(x)w(x)]=\Delta v(x)w(x)+2(\nabla v(x),\nabla w(x))+v(x)\Delta w(x),$$
для любого $x\in B_\delta(x^0)$ получим
$$\begin{aligned}
\bigl(|J_{g_{M+1}}(x)|-1\bigr)\Delta u(g_{M+1}(x))+\sum_{i=1}^n\left[2\frac{\partial|J_{g_{M+1}}(x)|}{\partial x_i}\frac{\partial u(g_{M+1}(x))}{\partial x_i}+\frac{\partial^2|J_{g_{M+1}}(x)|}{\partial x_i^2}u(g_{M+1}(x))\right]&=\\
=\bigl(|J_{g_{M+1}}(x)|-1\bigr)(\Delta u)(g_{M+1}(x)).&
\end{aligned}$$
Пусть $P(x)=(x_k-[g_{M+1}]_k(x^B))(x_m-[g_{M+1}]_m(x^B))$, где $k,m=1,\dots,n$ а $x^B\in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Тогда аналогично соотношениям (4.32) мы получим
$$u(g_{M+1}(x))\Big|_{x=x^B}=\bigl[u(g_{M+1}(x))\bigr]_{x_i}\Big|_{x=x^B}=0. \tag{4.51}$$
Из двух последних равенств вытекает
$$\Bigl[\bigl(|J_{g_{M+1}}(x)|-1\bigr)\Delta u(g_{M+1}(x))\Bigr]\Big|_{x=x^B}=\Bigl[\bigl(|J_{g_{M+1}}(x)|-1\bigr)(\Delta u)(g_{M+1}(x))\Bigr]\Big|_{x=x^B}. \tag{4.52}$$
Следовательно, имеет место либо $|J_{g_{M+1}}(x^B)|=1$, либо
$$\Delta u(g_{M+1}(x))\Big|_{x=x^B}=(\Delta u)(g_{M+1}(x))\Big|_{x=x^B}.$$
Поскольку точка $x^B\in B_\delta(x^0)$ произвольна, в первом случае мы имеем
$$|J_{g_{M+1}}(x)|=1\quad\forall x\in B_\delta(x^0). \tag{4.53}$$
Во втором случае, заменяя g_1 на g_{M+1} в равенстве (4.19), мы получим (4.20), (4.21) и (4.22), где g_1 заменено на g_{M+1}. Тогда мы также приходим к свойству (4.53).

5. Как было указано в доказательстве леммы 4.4, в силу того, что $|J_{g_{M+1}}(x)|\in C^2(\overline{Q})$, теперь достаточно рассмотреть только случаи, когда условия $(A1)^{M+1}$, $(A3_i)$, $(A4_i)^{M+1}$–$(A8_i)^{M+1}$, $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$ нарушаются на множестве с непустой внутренностью.

Во-первых, если условие $(A1)^{M+1}$ нарушается для любого $x\in B_\delta(x^0)$, т. е. $g_{M+1}(x)=x$ в $B_\delta(x^0)$, то свойство (4.53) выполняется тривиальным образом.

Случай $(\overline{A3})$ рассматривается так же, как в пункте 2 доказательства леммы 4.4 в сочетании с пунктом 4 настоящего доказательства, с заменой g_1 на g_{M+1}.

Случай $(\overline{A4})^{M+1}$ не реализуется, так как в силу тождества $g_{M+1}(x) \equiv g^{-1}_{M+1}(x)$ и условия 4.3 имеет место $g_{M+1}(x) \neq g_i(x)$ при почти всех $x \in Q$ и всех $i = 1, \dots, N$, $i \neq M+1$.

Условия $(A5_i)^{M+1}$, $i = 1, \dots, N$, не нарушаются в силу условия 4.3, поэтому случай $(\overline{A5})^{M+1}$ не реализуется.

Любой из случаев $(\overline{A6})^{M+1}$–$(\overline{A10})^{M+1}$ рассматривается так же, как в пункте 5 доказательства леммы 4.4 в сочетании с пунктом 4 настоящего доказательства, с заменой g_1 на g_{M+1} и применением равенства (4.51).

Любая возможная комбинация случаев $(\overline{A3})$, $(\overline{A4})^{M+1}$ и $(\overline{A6})^{M+1}$–$(\overline{A10})^{M+1}$ рассматривается так же, как в пункте 6 доказательства леммы 4.4 в сочетании с пунктом 4 настоящего доказательства. Единственное отличие в том, что нарушается условие $(B2)$. В результате, используя равенства (4.51), в любом случае придем к равенству

$$(A_{M+1}A_0u(x) + A_0A^*_{M+1}u(x))\big|_{x=x^B} = (A_0A_{M+1}u(x) + A^*_{M+1}A_0u(x))\big|_{x=x^B},$$

откуда получим (4.52) и, следовательно, (4.53).

Таким образом, при почти всех $x \in Q$ имеет место равенство $|J_{g_{M+1}}(x)| = 1$. В силу того, что $|J_{g_{M+1}}(x)| \in C^2(\overline{Q})$, получим $|J_{g_{M+1}}(x)| = 1$ для любого $x \in Q$. Повторяя пункты 4, 5 настоящего доказательства для преобразований $g_{M+2}, \dots, g_N$, получим второе утверждение леммы. □

Лемма 4.10. *Пусть $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ и $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, M$, а также $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \dots, N$. Тогда $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$, и если оператор A нормальный и выполнены условия 4.2^M, 4.3 и 4.4^M, то*

$$g_ig_i(x) = g_ig_j(x), \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N. \tag{4.54}$$

Доказательство. Предположения этой леммы повторяют предположения леммы 4.9 с добавлением условия 4.4^M.

По лемме 4.9 получим

$$g_i(x) = K_ix + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \tag{4.55}$$

где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, а также

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad g_i(Q) = Q, \quad i = M+1, \dots, N. \tag{4.56}$$

По определению, $\mathcal{D}(A) = \{u \in \tilde{W}^2_2(Q) : Bu = 0\}$. Из того, что $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, и преобразования $g_1 \dots, g_N$ имеют вид (4.55), (4.56) следует, что $A_1u, \dots, A_Nu, A^*_1u, \dots, A^*_Nu \in \mathcal{D}(A)$ при $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы [8, теорема 5.1, раздел 5, глава 2] получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in \tilde{W}^4_2(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

Из равенств (4.55) следует, что уравнения (4.20), (4.21) для преобразований $g_1, \dots, g_M$ обращаются в тождества в Q. Подставляя их в равенство (4.19), записанное для преобразований $g_1, \dots, g_M$, для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$A_0A_iu = A_iA_0u, \quad A_0A^*_iu = A^*_iA_0u, \quad i = 1, \dots, M. \tag{4.57}$$

По условию леммы мы имеем $g_i(x) \equiv g_i^{-1}(x)$ для всех $x \in Q$, $i = M+1, \dots, N$. Принимая это во внимание, из леммы 4.1 и равенств (4.56) получим

$$A_i = A^*_i, \quad i = M+1, \dots, N. \tag{4.58}$$

Значит, для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ имеют место равенства

$$A_0A_iu = A_0A^*_iu, \quad A_iA_0u = A^*_iA_0u, \quad i = M+1, \dots, N. \tag{4.59}$$

Учитывая равенства (4.57) и (4.59), из нормальности оператора A для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ вытекает

$$(A_1 + \ldots + A_N)(A^*_1 + \ldots + A^*_N)u = (A^*_1 + \ldots + A^*_N)(A_1 + \ldots + A_N)u,$$

т. е.

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} (A_iA^*_ju + A_jA^*_iu) + \sum_{i=1}^{N} A_iA^*_iu = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} (A^*_iA_ju + A^*_jA_iu) + \sum_{i=1}^{N} A^*_iA_iu. \tag{4.60}$$

Из свойств (4.55) и (4.56) следует, что $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$. Тогда в силу леммы 4.1 для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$A_i A_i^* u = A_i^* A_i u = a_i^2 u, \quad i = 1, \dots, N. \tag{4.61}$$

В силу равенств (4.58) для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ имеем

$$A_i A_j^* u + A_j A_i^* u = A_i^* A_j u + A_j^* A_i u = A_i A_j u + A_j A_i u, \quad i = M+1, \dots, N. \tag{4.62}$$

С учетом (4.61) и (4.62) для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ запишем равенство (4.60) в виде

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M} (A_i A_j^* u + A_j A_i^* u) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=M+1}^{N} (A_i A_j u + A_j A_i^* u) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M} (A_i^* A_j u + A_j^* A_i u) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=M+1}^{N} (A_i^* A_j u + A_j A_i u).$$

Поскольку $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$, с помощью леммы 4.1 для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ и почти всех $x \in Q$ получим

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M} a_i a_j \big(u(g_j^{-1} g_i(x)) + u(g_i^{-1} g_j(x))\big) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=M+1}^{N} a_i a_j \big(u(g_j g_i(x)) + u(g_i^{-1} g_j(x))\big) =$$
$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M} a_i a_j \big(u(g_j g_i^{-1}(x)) + u(g_i g_j^{-1}(x))\big) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=M+1}^{N} a_i a_j \big(u(g_j g_i^{-1}(x)) + u(g_i g_j(x))\big). \tag{4.63}$$

Так же, как в доказательстве леммы 4.5, в силу условия 4.4^M и вложения $\dot{C}^\infty(Q) \subset \mathcal{D}(AA^*)$, применяя предложение 4.5 к равенству (4.63), получим, что для всех $i, j = 1, \dots, M$ верно либо (4.45), либо (4.46). Поэтому так же, как в доказательстве леммы 4.5 для всех $x \in Q$ получим

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad i, j = 1, \dots, M. \tag{4.64}$$

Таким же образом, применяя предложение 4.5 к равенству (4.63), получим, что для всех $i = 1, \dots, M$, $j = M+1, \dots, N$ и $x \in Q$ верна по крайней мере одна из систем уравнений:

$$\begin{cases} g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \\ g_i^{-1} g_j(x) = g_j g_i^{-1}(x), \end{cases} \tag{4.65}$$
$$\begin{cases} g_i g_j(x) = g_i^{-1} g_j(x), \\ g_j g_i(x) = g_j g_i^{-1}(x). \end{cases} \tag{4.66}$$

Из системы (4.66) следует, что $g_j g_i(x) = g_j g_i^{-1}(x)$, откуда $g_i(x) = g_i^{-1}(x)$, т. е. $x \in \widehat{G}^2_{g_i}$. С другой стороны, $1 \leqslant i \leqslant M$, следовательно, преобразование g_i имеет вид (4.55). В пункте 7 доказательства леммы 4.4 было доказано, что для такого g_i множество $\widehat{G}^2_{g_i}$ принадлежит гиперплоскости размерности $r \leqslant n-2$, а значит, $\widehat{G}^2_{g_i}$ — множество нулевой меры в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, почти всюду в Q верна система (4.65). Поскольку преобразования $g_1, \dots, g_N$ непрерывны, для любого $x \in Q$ получим

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad i = 1, \dots, M, \quad j = M+1, \dots, N. \tag{4.67}$$

Равенства (4.64) и (4.67) завершают доказательство. □

Пример 4.6. Рассмотрим пример, показывающий, что условие 4.4^M существенно в лемме 4.10. При $N = 3$, $n = 3$ рассмотрим оператор $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$. Положим $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, тогда условие 4.4^M не выполняется. Возьмем следующие ортогональные преобразования:

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x \in Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$. Тогда $g_1(Q) = g_2(Q) = g_3(Q) = Q$ и легко проверить, что

$$g_2^2(x) = x, \quad g_3^2(x) = x, \quad g_2 g_3(x) = g_3 g_2(x), \qquad x \in Q;$$
$$g_1^2(x) \neq x, \quad g_1 g_2(x) \neq g_2 g_1(x), \quad g_1 g_3(x) \neq g_3 g_1(x), \qquad x \in Q \setminus \{x : x_1 = 0,\, x_3 = 0\}.$$

В терминах леммы 4.10 получим, что $G^2_{g_1} = Q \setminus \{x : x_1 = 0, x_3 = 0\} \neq \varnothing$ и $G^2_{g_2} = G^2_{g_3} = \varnothing$. Коэффициенты $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ удовлетворяют условию 4.2^M. Также легко убедиться в том, что выполнено условие 4.3 (поскольку матрицы ортогональны, обратные преобразования получаются переходом к транспонированным матрицам).

Докажем, что оператор A нормальный. Для любого $x \in Q$ очевидны соотношения

$$g_1 g_2^{-1}(x) = g_1^{-1} g_3(x), \quad g_2 g_1^{-1}(x) = g_3^{-1} g_1(x), \tag{4.68}$$

$$g_1 g_3^{-1}(x) = g_2^{-1} g_1(x), \quad g_3 g_1^{-1}(x) = g_1^{-1} g_2(x). \tag{4.69}$$

Поскольку g_1, g_2, g_3 — ортогональные преобразования, то так же, как в доказательстве леммы 4.5, доказывается, что для g_1, g_2, g_3 выполнены равенства (4.42), (4.43). Следовательно, нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора $A_1 + A_2 + A_3$ при $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Легко проверить, что оператор $A_1 + A_2 + A_3$ является нормальным в силу равенств $g_2 g_3(x) = g_3 g_2(x)$, (4.68) и (4.69), $x \in Q$.

Таким образом, выполнены все условия леммы 4.10, кроме условия 4.4^M. Оператор A является нормальным, однако преобразование g_1 не коммутирует с g_2 и g_3. Следовательно, условие 4.4^M существенно в лемме 4.10.

Пример 4.7. Преобразования g_1, g_2, g_3 в примере 4.6 являются конечными суперпозициями отражений относительно координатных плоскостей и поворотов на угол $\pi/2$ вокруг координатных осей. Приведем пример преобразований, являющихся конечными суперпозициями только поворотов на угол $\pi/2$, и имеющих те же свойства, что и преобразования g_1, g_2, g_3 из примера 4.6:

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Лемма 4.11. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$, $g_i(Q) = Q$ *при* $i = 1, \ldots, M$, $G^2_{g_i} = \varnothing$ *при* $i = M+1, \ldots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \ldots, N$, *и если преобразования* $g_1, \ldots, g_N$ *таковы, что*

1. $g_i(x) = K_i x + b_i$, $x \in Q$, *где* K_i — *ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, M$,
2. $|J_{g_i}(x)| = 1, \ x \in Q, \ i = M+1, \ldots, N$,
3. $g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \ x \in Q, \ i = 1, \ldots, M, \ j = 1, \ldots, N$,

то оператор A *нормальный.*

Доказательство. Так как $G^2_{g_i} = \varnothing$, по лемме 4.2 получим $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \ldots, N$.

Поскольку преобразования $g_1, \ldots, g_N$ имеют вид (4.55), (4.56), так же, как в доказательстве леммы 4.10, получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in \tilde{W}_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 4.10, получим, что оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда равенство (4.63) верно для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Из условия (3) леммы следует, что равенство (4.63) верно для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. □

Доказательство теоремы 4.3 следует из лемм 4.9, 4.10 и 4.11.

5. Спектральные свойства линеаризованного оператора

Рассмотрим теперь линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор $\mathcal{L}(\varkappa)$. В дальнейшем будем предполагать, что выполняется следующее условие.

Условие 5.1. $\hat{w} \neq \pi m, \ m \in \mathbb{Z}$.

В противном случае оператор $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$ самосопряженный и, следовательно, его спектр вещественный.

Введем линейный неограниченный оператор $\tilde{\mathcal{A}}_0 : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}_0) = \{v \in \tilde{W}_p^2(Q) : \partial v/\partial\nu\big|_{\partial Q} = 0\}$ по формуле $\tilde{\mathcal{A}}_0 v = D\Delta v$, $v \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}_0)$. Определим также ограниченный оператор $\tilde{\mathcal{A}}_1 : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ по формуле

$$(\tilde{\mathcal{A}}_1 v)(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i v(g_i(x)), \tag{5.1}$$

где $a_i = -\hat{K}\gamma_i \sin\hat{w}$. Очевидно, что $\tilde{\mathcal{L}}_0 = \tilde{\mathcal{A}}_0 + \tilde{\mathcal{A}}_1 - I$.

Обозначим через $\mathcal{B}(\tilde{L}_p(Q))$ пространство линейных ограниченных операторов в $\tilde{L}_p(Q)$. Пусть $\|\cdot\|_p$ — норма оператора из $\mathcal{B}(\tilde{L}_p(Q))$.

Следующая лемма была доказана в работе [14] при $N=1$, т. е. для $(\tilde{\mathcal{A}}_1 v)(x) = av(g(x))$.

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия* 2.1, 2.2, 3.2, 3.3 *и* 5.1. *Тогда для любого* $\pi/2 < \theta < \pi$ *существует* $\xi \in \mathbb{R}$ *такое, что спектр* $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}_0) \subset \mathbb{C} \setminus S_{\theta\xi}$ *и*

$$\|(\tilde{\mathcal{L}}_0 - \lambda I)^{-1}\|_p \leqslant M|\lambda - \xi|^{-1} \qquad (\xi \neq \lambda,\ \lambda \in S_{\theta\xi}), \tag{5.2}$$

где $S_{\theta\xi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \xi)| \leqslant \theta\}$, *а число* $M > 0$ *не зависит от* λ.

Более того, резольвента $(\tilde{\mathcal{L}}_0 - \lambda I)^{-1} : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ *— компактный оператор при* $\lambda \notin \sigma(\tilde{\mathcal{L}}_0)$. *Следовательно, спектр* $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}_0)$ *дискретный.*

Доказательство. По теореме о лучах минимального роста [17, теорема 2.1] для любого $\pi/2 < \theta < \pi$ существует $q > 0$ такое, что $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}_0 - I) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega_{\theta q}$ и

$$\|(\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\|_p \leqslant M_1|\lambda|^{-1}, \quad \lambda \in \Omega_{\theta q}, \tag{5.3}$$

где $M_1 > 0$ не зависит от λ, $\Omega_{\theta q} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \theta,\ |\lambda| \geqslant q\}$.

Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{L}}_0 - \lambda I : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$, где $\lambda \notin \sigma(\tilde{\mathcal{A}}_0 - I)$. Очевидно,

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 - \lambda I = (\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)(I + (\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_1).$$

В силу (5.3) имеем

$$\|(\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_1\|_p \leqslant M_1\|\tilde{\mathcal{A}}_1\|_p \cdot |\lambda|^{-1}.$$

При $|\lambda| > 2M_1\|\tilde{\mathcal{A}}_1\|_p$ получим $\|(\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_1\|_p \leqslant 1/2$. Отсюда

$$\|I + (\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_1\|_p \geqslant 1/2,$$

поэтому

$$\|(I + (\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}\|_p \leqslant 2.$$

Следовательно, оператор $\tilde{\mathcal{L}}_0 - \lambda I$ имеет ограниченный обратный $(\tilde{\mathcal{L}}_0 - \lambda I)^{-1} : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ для $\lambda \in \Omega_{\theta q_0}$, где $q_0 = \max\{2M_1\|\tilde{\mathcal{A}}_1\|_p, q\}$. Более того,

$$\|(\tilde{\mathcal{L}}_0 - \lambda I)^{-1}\|_p \leqslant 2M_1|\lambda|^{-1}, \quad \lambda \in \Omega_{\theta q_0}. \tag{5.4}$$

Обозначим $\xi = q_0/\sin\theta$. Очевидно, $S_{\theta\xi} \subset \Omega_{\theta q_0}$ и $|\lambda - \xi| \leqslant |\lambda| + |\xi| \leqslant |\lambda| + |\lambda|/\sin\theta$ для $\lambda \in S_{\theta\xi}$. Поэтому из (5.4) следует (5.2) для $M = 2M_1(1 + 1/\sin\theta)$.

Компактность резольвенты $(\tilde{\mathcal{L}}_0 - \lambda I)^{-1} : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ для $\lambda \notin \sigma(\tilde{\mathcal{L}}_0)$ следует из теоремы Банаха об обратном операторе и компактности вложения $W_p^2(Q)$ в $L_p(Q)$. Дискретность спектра вытекает из теоремы об операторе с компактной резольвентой [6, гл. III, п. 6, теорема 6.29]. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия* 2.1, 2.2, 3.2, 3.3 *и* 5.1. *Предположим, что* $g_i \in C^\infty(\overline{Q})$ *и* $J_{g_i}(x) \neq 0$, $x \in \overline{Q}$, *где* $J_{g_i}(x)$ *— якобиан преобразования* $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$.

Тогда спектр оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ *для любого* $p > 1$ *удовлетворяет условию* $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|\tilde{\mathcal{A}}_1\|_2 - 1,\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|\tilde{\mathcal{A}}_1\|_2\}$.

Доказательство. 1. Следуя доказательству аналогичной леммы [14, лемма 3.2], вначале докажем, что спектр оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ не зависит от p. Пусть $u_s(x)$ — собственная функция оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$, соответствующая собственному значению λ_s. Тогда $u_s \in \tilde{W}_p^2(Q)$ является решением краевой задачи

$$\Delta u_s(x) - u_s(x) - \lambda_s u_s(x) = -\sum_{i=1}^{N} a_i u_s(g_i(x)), \quad x \in Q, \tag{5.5}$$

$$\left.\frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right|_{\partial Q} = 0. \tag{5.6}$$

По условию преобразования $g_i(x)$ невырожденные и $g_i \in C^\infty(\overline{Q})$, $i = 1, \dots, N$. Поэтому правая часть уравнения (5.5) принадлежит $\tilde{W}_p^2(Q)$. Следовательно, по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических задач [15, п. 5.4.1] имеем $u_s \in \tilde{W}_p^4(Q)$. Используя эти рассуждения k раз, мы получим $u_s \in \tilde{W}_p^{2+2k}(Q)$. В силу произвольности k из теоремы вложения имеем $u_s \in C^\infty(\overline{Q})$. Поэтому u_s является собственной функцией оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_{p_1}(Q) \to \tilde{L}_{p_1}(Q)$, соответствующей собственному значению λ_s, для любого $p_1 > 1$. Таким образом, спектр оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ не зависит от p.

2. Поскольку спектр оператора $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ не зависит от p, рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$. Оператор $\tilde{\mathcal{A}}_0 : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$ самосопряженный. Поэтому, как известно [6, гл. V, п. 3], спектр $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}_0 - I)$ вещественный и

$$\|(\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\|_2 \leqslant |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{5.7}$$

Так как оператор $\tilde{\mathcal{A}}_1$ ограничен, получим

$$\|(\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_1\|_2 \leqslant \|\tilde{\mathcal{A}}_1\|_2 |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{5.8}$$

Очевидно, для $\lambda \notin \sigma(\tilde{\mathcal{A}}_0 - I)$ можно записать

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 - \lambda I = (\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)(I + (\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_1). \tag{5.9}$$

При $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|\tilde{\mathcal{A}}_1\|_2$ из (5.8) получим $\|(\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_1\|_2 \leqslant c_1$, где $c_1 \geqslant 1$. Это не позволяет получить оценку вида $\|I + (\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_1\|_2 \geqslant c_2 > 0$, эквивалентную существованию ограниченного оператора $(I + (\tilde{\mathcal{A}}_0 - I - \lambda I)^{-1}\tilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}$. Поэтому из (5.7), (5.9) следует, что $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|\tilde{\mathcal{A}}_1\|_2\}$. Более того, по лемме 5.1 спектр $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}_0)$ дискретный.

Интегрируя по частям, для $u \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}_0)$ мы имеем

$$\operatorname{Re}(\tilde{\mathcal{L}}_0 u, u)_{L_2(Q)} = -D\int\limits_Q |\nabla u|^2\,dx - \int\limits_Q |u|^2\,dx + \operatorname{Re}\int\limits_Q \tilde{\mathcal{A}}_1 u\,\overline{u}\,dx \leqslant (\|\tilde{\mathcal{A}}_1\|_2 - 1)\|u\|^2_{L_2(Q)}.$$

Следовательно, $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|\tilde{\mathcal{A}}_1\|_2 - 1\}$. □

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия* 2.1, 2.2, 3.2, 3.3 *и* 5.1. *Предположим, что преобразования* $g_i \in C^1(\overline{Q})$ *таковы, что* $g_i^2(x) \equiv x$ *и* $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$.

Тогда оператор $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$ *самосопряженный.*

Доказательство. Из условия $g_i^2(x) \equiv x$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$, и условия 3.3 следует $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. Действительно, так как преобразование g_i взаимно-однозначно, из $g_i^2(x) \equiv x$ получим $g_i^{-1}(x) = g_i(x)$, $x \in Q$. Согласно условию 3.2, $g_i(Q) \subset Q$. Следовательно, любая точка $x \in Q$ имеет прообраз $g_i^{-1}(x) = g_i(x) \in Q$. Таким образом, $g_i(Q) = Q$.

Поскольку $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $g_i^2(x) \equiv x$ и $g_i(Q) = Q$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$, с помощью замены переменных $y^i = g_i(x)$ получим

$$(\tilde{\mathcal{A}}_1 u, v)_{\tilde{L}_2(Q)} = \sum_{i=1}^N \int\limits_Q a_i u(g_i(x))\overline{v(x)}\,dx = \sum_{i=1}^N \int\limits_Q u(y^i) a_i \overline{v(g_i^{-1}(y^i))} |J_{g_i^{-1}}(y^i)|\,dy^i =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int\limits_Q u(y^i) a_i \overline{u(g_i(y^i))}\,dy^i = (u, \tilde{\mathcal{A}}_1 v)_{\tilde{L}_2(Q)}$$

для всех $u, v \in \tilde{L}_2(Q)$.

Таким образом, ограниченный оператор $\tilde{\mathcal{A}}_1 : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$ самосопряженный. Поскольку $\tilde{\mathcal{L}}_0 = \tilde{\mathcal{A}}_0 - I + \tilde{\mathcal{A}}_1$, то оператор $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_2(Q) \to \tilde{L}_2(Q)$ самосопряженный. □

Как и в разделе 3, при малых $\varkappa$ рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\varkappa) : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}(\varkappa)) = \{v \in \tilde{W}_p^2(Q) : \partial v/\partial\nu\big|_{\partial Q} = 0\}$, заданный формулой

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varkappa)v = D\Delta v - v - (\hat{K} + \varkappa)\sin w(\varkappa)\sum_{i=1}^{N}\gamma_i v_{g_i}.$$

Из леммы 5.1 следует, что оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\varkappa)$ имеет компактную резольвенту. Следовательно, спектр $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}(\varkappa))$ дискретный. Обозначим через $\lambda_s(\varkappa) = \delta_s(\varkappa) + i\omega_s(\varkappa)$, $s = 1, 2, \ldots$, собственные значения оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\varkappa)$. Из [19, лемма 2.1] следует, что $\delta_s(\varkappa)$ и $\omega_s(\varkappa)$ бесконечно дифференцируемы при достаточно малых $\varkappa$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 5.2. $\lambda_1(0) = i\hat{\omega}$ — *простое собственное значение оператора* $\tilde{\mathcal{L}}_0 : \tilde{L}_p(Q) \to \tilde{L}_p(Q)$, *причем* $\hat{\omega} > 0$ *и* $n\hat{\omega}i \notin \sigma(\tilde{\mathcal{L}}_0)$, $n = 0, 2, 3, \ldots$.

Условие 5.3. $\delta_1'(0) \neq 0$.

Условие 5.1 следует из условия 5.2. Действительно, при нарушении условия 5.1 оператор $\tilde{\mathcal{L}}_0$ становится самосопряженным, а его спектр — вещественным, откуда следует нарушение условия 5.2. Кроме того, для выполнения условия 5.2 необходимо, чтобы преобразования $g_1, \ldots, g_N$ не удовлетворяли условиям леммы 5.3.

6. Бифуркация периодических решений

В этом разделе, используя результаты разделов 2, 3 и 5, мы получим достаточные условия существования бифуркации Андронова—Хопфа периодических решений квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с конечным числом преобразований пространственных переменных.

Чтобы изучать решения уравнения (3.10) с неизвестным периодом, положим $\tau = \hat{\omega}\omega(\varkappa)t$, где $\omega(\varkappa)$ — неизвестная частота, близкая к 1.

Рассмотрим теперь 2π-периодические решения уравнения

$$v_\tau = (\hat{\omega}\omega(\varkappa))^{-1} f(v(\tau), \varkappa), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $W_{p,N}^2(Q) = \{v \in W_p^2(Q) : \partial v/\partial\nu\big|_{\partial Q} = 0\}$.

Из [19, теорема 2.2], [14, теорема 4.1] и лемм 3.4, 5.1 вытекает следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть выполняются условия* 2.1, 2.2, 3.2, 3.3, 5.2, 5.3. *Зафиксируем* $\sigma \in (0, 1)$ *и* $p > n/2$.

Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ *и аналитическая вектор-функция* $\varepsilon \mapsto (v(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon))$ *из* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *в* $C_{2\pi}^\sigma(W_{p,N}^2(Q)) \cap C_{2\pi}^{1,\sigma}(L_p(Q)) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *такая, что* $v(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$ *и* $v(\varepsilon)$ *не постоянна по* τ *при* $\varepsilon \neq 0$.

Функция $u(x, t, \varepsilon) = w(\varkappa(\varepsilon)) + v(x, \tau, \varepsilon)$ *является* $2\pi(\hat{\omega}\omega(\varepsilon))^{-1}$*-периодическим по* t *решением задачи* (2.1), (2.2), *где* $\tau = \omega(\varepsilon)\hat{\omega}t$. *При этом* $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \ldots$, $\varkappa(\varepsilon) = \varepsilon^2\varkappa_2 + \varepsilon^3\varkappa_3 + \ldots$.

Более того, существует $\delta_0 > 0$ *такое, что если* $\bar{\varkappa}, \bar{\omega} \in \mathbb{R}$ *и* $\bar{v} \in C_{2\pi}^\sigma(W_{p,N}^2(Q)) \cap C_{2\pi}^{1,\sigma}(L_p(Q))$ *удовлетворяют условиям*

$$\bar{v}'(\tau) = (\hat{\omega}\bar{\omega})^{-1} f(\bar{v}(\tau), \bar{\varkappa}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$
$$\|\bar{v}\|_{C_{2\pi}^\sigma(W_{p,N}^2(Q)) \cap C_{2\pi}^{1,\sigma}(L_p(Q))} < \delta_0, \quad |\bar{\varkappa}| < \delta_0, \quad |1 - \bar{\omega}| < \delta_0,$$

то существуют $\theta \in [0, 2\pi)$ *и* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *такие, что* $\bar{\varkappa} = \varkappa(\varepsilon)$, $\bar{\omega} = \omega(\varepsilon)$, $\bar{v}(\tau) = v(x, \tau + \theta, \varepsilon)$.

Автор благодарен профессору А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и постоянное внимание к этой работе. Автор также благодарен Р. В. Шамину за обсуждение работы и ряд советов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белан Е. П.* О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-дифференциальном уравнении// Ученые записки ТНУ. Сер. мат. мех. информ. и киберн. — 2002. — *2.* — С. 11–23.
2. *Белан Е. П.* О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении// Дифф. уравн. — 2004. — *40*, № 5. — С. 645–654.
3. *Варфоломеев Е. М.* Нормальность эллиптического функционально-дифференциального оператора с двумя преобразованиями переменных// Spectral and evolution problems. Труды 16-й Крымской осенней математической школы-симпозиума. — 2006. — *16.* — С. 118–122.
4. *Варфоломеев Е. М.* О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов второго порядка// Успехи мат. наук. — 2006. — *61*, № 1. — С. 173-174.
5. *Воронцов М. А.*, *Думаревский Ю. Д.*, *Пруидзе Д. В.*, *Шмальгаузен В. И.* Автоволновые процессы в системах с оптической обратной связью// Изв. АН СССР. Физика. — 1988. — *52*, № 2. — С. 374–376.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
7. *Колесов А. Ю.*, *Розов Н. Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения// Теор. и матем. физ. — 2004. — *140*, № 1. — С. 14–28.
8. *Лионс Ж. Л.*, *Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
9. *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1993. — *33*, № 1. — С. 69–80.
10. *Разгулин А. В.* О параболических функционально-дифференциальных уравнениях с управляемым преобразованием пространственных аргументов// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 4. — С. 448–451.
11. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М: Мир, 1975.
12. *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений// Успехи мат. наук. — 1996. — *51*, № 1 (307). — С. 169-170.
13. *Скубачевский А. Л.* О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов// Функц. анализ и его прилож. — 1997. — *31*, № 4. — С. 60–65.
14. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Дифф. уравн. — 1998. — *34*, № 10. — С. 1394–1401.
15. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
16. *Чушкин В. А.*, *Разгулин А. В.* Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отражением пространственного аргумента// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2003. — *2.* — С. 13–20.
17. *Agmon S.* On the eigenvalues and on the eigenfunctions of general elliptic boundary value problems// Comm. Pure Appl. Math. — 1962. — *15.* — С. 119–147.
18. *Crandall M. G.*, *Rabinowitz P. H.* The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1978. — *68.* — С. 53–72.
19. *Da Prato G.*, *Lunardi A.* Hopf bifurcation for fully nonlinear equations in Banach space// Ann. Inst. Henri Poincare. — 1986. — *3.* — С. 315–329.
20. *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback// Chaos in Optics. Proc. SPIE, ed. R. Roy. — 1993. — *2039.* — С. 342–352.
21. Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equation arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — *32*, № 2. — С. 261–278.
22. *Varfolomeyev E. M.* On the existence of orthonormal basis consisting of eigenfunctions of elliptic functional differential operators// Funct. Differ. Equ. — 2006. — *13*, № 2. — С. 267–304.
23. *Vorontsov M. A.*, *Iroshnikov N. G.*, *Abernathy R. L.* Diffractive patterns in nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation// Chaos Solitons Fractals. — 1994. — *4*, № 8-9. — С. 1701–1716.

Евгений Михайлович Варфоломеев
Российский университет дружбы народов
Кафедра дифференциальных уравнений и математической физики
E-mail: eugene.varfolomeyev@gmail.com