

О БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА — ХОПФА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ПЕРЕМЕННЫХ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

Варфоломеев Е.М.
Российский университет дружбы народов

Нелинейная оптическая система с преобразованиями поля в двумерной обратной связи описывается (см. [1], [2]) задачей Неймана для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = D\Delta u(x,t) + K \left(1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \cos(u(g_i(x),t)) \right) \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами $D, K, \gamma_1, \dots, \gamma_N$ и неособенными взаимно-однозначными преобразованиями переменных g_1, \dots, g_N .

С точки зрения приложений в нелинейной оптике представляет интерес изучение бифуркации Андронова — Хопфа периодических решений такого уравнения. В работах [3], [4] существование и устойчивость бифуркации изучались в случае, когда область решения — круг или кольцо, а преобразование пространственных переменных одно ($N = 1$) и представляет собой вращение на постоянный угол. Случай произвольной n -мерной области и одного преобразования пространственных переменных рассматривался в работах [5], [6]. В этих работах предполагалось, что линеаризованный эллиптический оператор задачи нормальный. В работе [7] были получены необходимые и достаточные условия нормальности таких операторов. В работе [8] в случае произвольной n -мерной области и одного произвольного преобразования пространственных переменных без предположения нормальности были получены достаточные условия существования бифуркации Андронова — Хопфа периодических решений квазилинейных параболических уравнений, а также разложение решений в ряд по малому параметру.

В настоящем исследовании обобщены результаты работы [8] для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения (1) с конечным числом преобразований переменных. Получены достаточные условия существования бифуркации Андронова — Хопфа периодических решений, а также разложение таких решений в ряд по малому параметру. Достаточные условия получены в терминах коэффициентов задачи, свойств преобразований g_1, \dots, g_N и спектральных свойств линеаризованного оператора задачи. Для этого используются методы, обобщающие теорему о бифуркации Андронова — Хопфа на случай уравнений с частными производными, развитые в работах [9], [10].

Следует отметить, что необходимые и достаточные условия нормальности линеаризованного эллиптического оператора задачи (1) были получены в работах [11], [12].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 04-01-00256.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.А.Воронцов, Ю.Д.Думаревский, Д.В.Пруидзе, В.И.Шмальгаузен, *Автоволновые процессы в системах с оптической обратной связью*, Изв. АН СССР. Физика, **52**, № 2 (1988), 374–376.
2. M.A.Vorontsov, N.G.Iroshnikov, R.L.Abernathy, *Diffraction patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback systems with field rotation*, Chaos, Solitons and Fractals, **4** (1994), 1701–1716.
3. А.В.Разгулин, *Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом*, Журн. выч. мат. и мат. физики, **33**, № 1 (1993), 69–80.
4. A.V.Razgulin, *Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback*, Chaos in Optics, Rajarshi Roy ed., Proceedings SPIE 2039 (1993), 342–352.

5. А.Л.Скубачевский, *О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений*, Успехи мат. наук, **51**, № 1 (1996), 169–170.
6. A.L.Skubachevskii, *Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics*, Nonlinear Anal., **32**, № 2 (1998), 261–278.
7. А.Л.Скубачевский, *О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов*, Функц. анализ и его приложения, **31**, № 4 (1997), 60–65.
8. Скубачевский А.Л., *О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения, **34**, № 10 (1998), 1394–1401.
9. Crandall M.G., Rabinowitz P.H., *The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions*, Arch. Rat. Mech. Anal., **68** (1978), 53–72.
10. Da Prato G., Lunardi A., *Hopf bifurcation for fully nonlinear equations in Banach space*, Ann. Inst. Henri Poincaré., **3** (1986), 315–329.
11. Е.М.Варфоломеев, *О нормальности эллиптических функционально-дифференциальных операторов второго порядка*, Успехи мат. наук, **61**, № 1 (2006), 173–174.
12. Е.М.Варфоломеев, *О нормальности эллиптических функционально-дифференциальных операторов с преобразованиями переменных в младших членах*, Современная математика. Фундаментальные направления, *принято к печати* (2006).