НОРМАЛЬНОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ДВУМЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ПЕРЕМЕННЫХ

Варфоломеев Е.М.
Российский университет дружбы народов,
Москва, Россия

В нелинейных оптических системах с преобразованием поля в двумерной обратной связи возникают различные регулярные периодические явления, которые называют "многолепестковыми волнами" [1, 2]. Эти световые структуры используются в современных компьютерных технологиях для создания оптических аналогов нейронных сетей. Математическая модель указанной системы описывается бифуркацией периодических решений квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованием пространственных переменных $g(x)$. В работах [3, 4] эта задача рассматривалась в случае, когда область Q — круг или кольцо, а преобразование g — вращение на некоторый угол θ. Случай, когда область $Q \subset \mathbb{R}^2$ и преобразование g произвольны, рассматривался в работах [5, 6]. В этих статьях предполагалось, что линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор — нормальный. В работе [7] были получены необходимые и достаточные условия нормальности указанного оператора в терминах области $Q \subset \mathbb{R}^n$ и преобразования g. Более общий случай без предположения нормальности линеаризованного эллиптического оператора рассмотрен в работе [8].

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия нормальности линеаризованного оператора в случае двух преобразований пространственных переменных.

1. Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \subset C^\infty$, $n \geq 2$. Пусть g, f — взаимно однозначные преобразования класса C^3, такие что

$$g : V \subset \mathbb{R}^n \to g(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad |J_g(x)| \neq 0, \ x \in V;$$
$$f : V \subset \mathbb{R}^n \to f(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad |J_f(x)| \neq 0, \ x \in V.$$

Здесь V — ограниченная область, $\overline{Q} \subset V$, $J_g(x) = [\partial g_i/\partial x_j]_{i,j=1}^n$ — матрица Якоби преобразования g, $|J_g(x)| = |\det J_g(x)|$. Пусть также выполнено

$$g(Q) \subset Q, \quad f(Q) \subset Q. \tag{1}$$

Рассмотрим неограниченный оператор $A_0 : L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(A_0) = \{v \in W_2^2(Q) : Bv = 0\}$, действующий по формуле $A_0 v = \Delta v,\ v \in D(A_0)$. Здесь $W_2^k(Q)$ — пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе со всеми обобщенными производными до порядка k включительно, $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v/\partial \nu)|_{\partial Q}$, ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$. Как известно, A_0 — самосопряженный оператор. Положим $A : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $A = A_0 + A_1 + A_2$, где A_1, A_2 — линейные ограниченные операторы, определенные на всем пространстве $L_2(Q)$ следующим образом:

$$A_1 : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad A_1 v(x) = a_1 v(g(x)),$$
$$A_2 : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad A_2 v(x) = a_2 v(f(x)),$$

где $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$ — вещественные числа.

Оператор A называется нормальным, если $D(AA^*) = D(A^*A)$ и $AA^*v = A^*Av$ для любого $v \in D(A^*A)$. Положим $D(A) = D(A_0)$.

Определим множества $G_g^m = \{x \in Q : g^m(x) \neq x\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Здесь $g^m(x)$ обозначает преобразование g, примененное m раз. Обозначим $\widetilde{G}_g^m = Q \setminus G_g^m$. Будем также записывать суперпозицию преобразований в виде $fg(x)$, $g^{-1}f(x)$ и т. п.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $G_g^2 \neq \varnothing$, $G_f^2 \neq \varnothing$. Кроме того, пусть $g(Q) = f(Q) = Q$ и $|a_1| \neq |a_2|$. Тогда для нормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы:*

$$\begin{aligned} &g(x) = Kx + b, \quad f(x) = Cx + d, \quad x \in Q, \\ &gf(x) = fg(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \tag{2}$$

где K, C — ортогональные матрицы порядка $n \times n$, $K^2 \neq E$, $C^2 \neq E$, $b, d \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть $G_g^2 = \varnothing$, $G_f^2 = \varnothing$. Тогда $g(Q) = f(Q) = Q$, а также:*

(1) *Если оператор A — нормальный и выполнено $a_1 + a_2 \neq 0$, то*

$$\begin{cases} a_1^2\left(|J_g(x)| - |J_g(x)|^{-1}\right) + a_2^2\left(|J_f(x)| - |J_f(x)|^{-1}\right) = 0, & x \in G_g^1 \cap G_f^1, \\ |J_g(x)| = |J_f(x)| = 1, & x \in Q \setminus (G_g^1 \cap G_f^1). \end{cases}$$

(2) *Если $|J_g(x)| = |J_f(x)| = 1$, $x \in Q$, то A — нормальный, самосопряженный оператор.*

Теорема 3. *Пусть $G_g^2 \neq \varnothing$, $G_f^2 = \varnothing$. Кроме того, пусть $g(Q) = Q$. Тогда $f(Q) = Q$, и для нормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы:*

$$\begin{aligned} &g(x) = Kx + b, \quad |J_f(x)| = 1, \quad x \in Q, \\ &gf(x) = fg(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \tag{3}$$

где K — ортогональная матрица порядка $n \times n$, $K^2 \neq E$, $b \in \mathbb{R}^n$.

3. Комментарии

Для доказательства этих теорем использованы методы, примененные в работе [7]. Наличие двух преобразований переменных существенно усложняет задачу. Потребовалось рассмотреть различные свойства преобразований g и f, в частности, свойства группы преобразований, порожденных ими. Доказательства приведенных теорем будут опубликованы в журнале “Functional Differential Equations” в 2006 году.

В работе [7] были получены следующие необходимые и достаточные условия нормальности оператора A для случая одного преобразования переменных (т. е. при $a_2 = 0$).

Теорема 4. *Пусть $G_g^2 \neq \varnothing$. Тогда для нормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы*

$$g(Q) = Q, \quad g(x) = Kx + b, \quad x \in Q,$$

где K — ортогональная матрица порядка $n \times n$ и $K^2 \neq E$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 5. *Пусть $G_g^2 = \varnothing$. Тогда для нормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы*

$$g(Q) = Q, \quad |J_g(x)| \equiv 1, \quad x \in Q.$$

Более того, если A — нормальный оператор, то он является самосопряженным.

Полученные в настоящей работе теоремы 1–3 при некоторых дополнительных условиях обобщают теоремы 4 и 5. Рассмотрим примеры, показывающие, что наложенные дополнительные условия являются существенными.

Пример 1. Условие $a_1 + a_2 \neq 0$ является существенным в теоремах 1 и 2 (в теореме 1 оно входит в условие $|a_1| \neq |a_2|$, что эквивалентно $a_1 + a_2 \neq 0$, $a_1 - a_2 \neq 0$). Действительно, если $a_1 + a_2 = 0$, то любые (нелинейные) преобразования g и f такие, что $g(x) = f(x)$, $x \in Q$, порождают нормальный (и самосопряженный) оператор $Au(x) = \Delta u(x)$.

Лемма 1. *Сопряженный оператор A_1^* определяется по формуле*

$$A_1^* v(x) = \begin{cases} a_1 |J_{g^{-1}}(x)| v(g^{-1}(x)) & \text{при } x \in g(Q), \\ 0 & \text{при } x \in Q \setminus g(Q), \end{cases}$$

где $J_{g^{-1}}(x)$ — матрица Якоби преобразования g^{-1}.

Доказательство очевидно; достаточно заменить переменную интегрирования при скалярном умножении в $L_2(Q)$. Сопряженный оператор A_2^* определяется аналогично.

Замечание 1. Так как $D(A_0) = D(A_0^*)$, а линейные операторы $A_k, A_k^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ ограничены, $k = 1, 2$, имеем $D(A) = D(A^*) = D(A_0)$.

Пример 2. Условие $a_1 - a_2 \neq 0$ существенно в теореме 1. Пусть имеет место $a_1 - a_2 = 0$, т. е. $a_1 = a_2 = a$. Возьмем взаимно однозначное преобразование g такое, что $g(Q) = Q$ и $|J_g(x)| \equiv 1$ при $x \in Q$. Тогда $|J_{g^{-1}}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$. Выберем преобразование $f(x) = g^{-1}(x)$, $x \in Q$. Тогда $f(Q) = Q$ и $|J_f(x)| \equiv |J_{f^{-1}}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$. Используя лемму 1, получим для $v \in D(A)$, $x \in Q$:

$$\begin{aligned} A^* v(x) = A_0^* v(x) + A_1^* v(x) + A_2^* v(x) = \Delta v(x) + a|J_{g^{-1}}(x)| v(g^{-1}(x)) + a|J_{f^{-1}}(x)| v(f^{-1}(x)) = \\ = \Delta v(x) + a v(f(x)) + a v(g(x)) = Av(x). \end{aligned}$$

Оператор A оказывается самосопряженным, а значит, нормальным. Осталось показать, что выбранные преобразования g и f могут не иметь вид (2). Действительно, рассмотрим преобразование единичного круга $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ типа квази-поворота:

$$g : (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2), \qquad \begin{cases} y_1 = r \cos(\hat{g}(r, \varphi)) \\ y_2 = r \sin(\hat{g}(r, \varphi)). \end{cases}$$

Здесь (x_1, x_2) и (y_1, y_2) — декартовы координаты единичного круга до и после преобразования g; r и φ — полярные координаты, соответствующие декартовым координатам (x_1, x_2). Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$, легко показать, что $J_g(r, \varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{g}(r, \varphi)$. Выберем

$$\hat{g}(r, \varphi) = \varphi + r.$$

Тогда получим $J_g(r, \varphi) \equiv 1$. Очевидно, построенное преобразование взаимно однозначно, $g(Q) = Q$, причем обратное преобразование $g^{-1}(x)$ определяется функцией $\hat{g}(r, \varphi) = \varphi - r$. Легко убедиться, что $g \in C^3$. Таким образом, при условии $a_1 - a_2 = 0$ построены преобразования g и $f = g^{-1}$, удовлетворяющие условиям теоремы 1 и не имеющие вид (2), такие, что оператор A является нормальным. Следовательно, условие $a_1 - a_2 \neq 0$ существенно в теореме 1.

Лемма 2. *Пусть $g(Q) = f(Q) = Q$, и для любого $x \in Q$ выполнено*

$$\begin{aligned} |J_{g^{-1}}(x)| &= |J_{g^{-1}}(g(x))|, \qquad & |J_{f^{-1}}(x)| &= |J_{f^{-1}}(f(x))|, \\ |J_{g^{-1}}(x)| &= |J_{g^{-1}}(f(x))|, \qquad & |J_{f^{-1}}(x)| &= |J_{f^{-1}}(g(x))|, \end{aligned}$$

$$fg(x) = gf(x).$$

Тогда $A_1 + A_2$ — нормальный оператор.

Доказательство. Применяя лемму 1, для любой функции $v(x) \in L_2(Q)$ получим:

$$A_1A_1^*v(x) = a_1^2|J_{g^{-1}}(g(x))|v(x), \qquad A_1^*A_1v(x) = a_1^2|J_{g^{-1}}(x)|v(x),$$
$$A_2A_2^*v(x) = a_2^2|J_{f^{-1}}(f(x))|v(x), \qquad A_2^*A_2v(x) = a_2^2|J_{f^{-1}}(x)|v(x),$$
$$A_1A_2^*v(x) = a_1a_2|J_{f^{-1}}(g(x))|v(f^{-1}g(x)), \qquad A_2^*A_1v(x) = a_1a_2|J_{f^{-1}}(x)|v(gf^{-1}(x)),$$
$$A_2A_1^*v(x) = a_1a_2|J_{g^{-1}}(f(x))|v(g^{-1}f(x)), \qquad A_1^*A_2v(x) = a_1a_2|J_{g^{-1}}(x)|v(fg^{-1}(x)).$$

Из соотношений $fg(x) = gf(x)$ и $g(Q) = f(Q) = Q$ следует, что $f^{-1}g(x) = gf^{-1}(x)$, $fg^{-1}(x) = g^{-1}f(x)$, $f^{-1}g^{-1}(x) = g^{-1}f^{-1}(x)$ при $x \in Q$. Отсюда, учитывая требование равенства якобианов, имеем

$$(A_1 + A_2)(A_1^* + A_2^*)\,v(x) = (A_1^* + A_2^*)(A_1 + A_2)\,v(x), \quad v(x) \in L_2(Q),$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Рассмотрим пример, демонстрирующий отсутствие нормальности оператора A_1+A_2 при некоммутативных преобразованиях g, f. Пусть $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2 < 4\}$, а g, f суть преобразования поворота вокруг осей x_1, x_2, соответственно:

$$g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Положим $\varphi = \psi = \pi/3$ и зафиксируем $x^0 = (0,\ 0,\ 1)^T$. Получим (см. рис. 1):

$$f^{-1}g(x^0) = f^{-1}(0,\ -\sqrt{3}/2,\ 1/2)^T = (\sqrt{3}/4,\ -\sqrt{3}/2,\ 1/4)^T,$$
$$gf^{-1}(x^0) = g(\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)^T = (\sqrt{3}/2,\ -\sqrt{3}/4,\ 1/4)^T,$$
$$g^{-1}f(x^0) = g^{-1}(-\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)^T = (-\sqrt{3}/2,\ \sqrt{3}/4,\ 1/4)^T,$$
$$fg^{-1}(x^0) = f(0,\ \sqrt{3}/2,\ 1/2)^T = (-\sqrt{3}/4,\ \sqrt{3}/2,\ 1/4)^T.$$

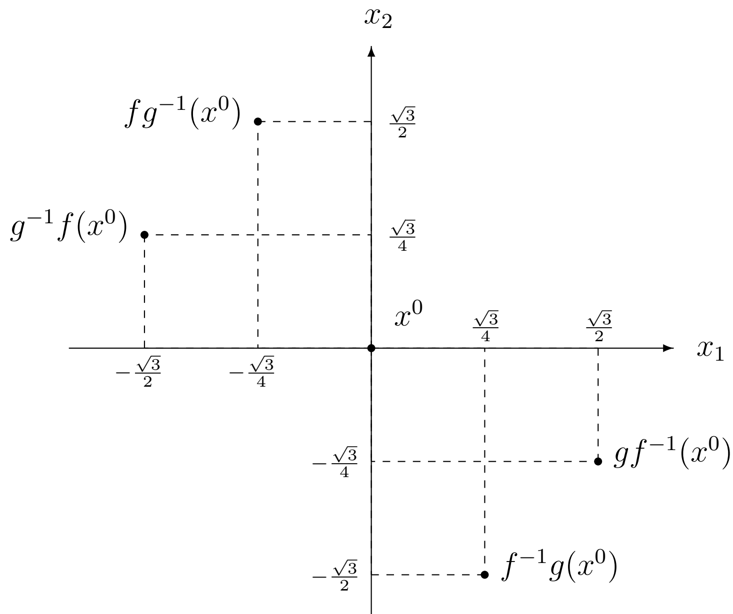

Рис. 1

Все условия леммы 2, кроме условия коммутативности преобразований g и f, выполнены. Тогда по доказательству леммы 2, нормальность оператора $A_1 + A_2$ эквивалентна соотношению

$$v(f^{-1}g(x)) + v(g^{-1}f(x)) = v(fg^{-1}(x)) + v(gf^{-1}(x)) \tag{4}$$

для любых $v \in L_2(Q)$ и почти всех $x \in Q$. Выберем $x = x^0$. Очевидно, тогда существуют функции $v \in L_2(Q)$, для которых равенство (4) не выполняется. Следовательно, оператор $A_1 + A_2$ не является нормальным. Значит, условие $fg(x) = gf(x)$ в лемме 2 существенно.

Лемма 3. *Пусть* $G_g^2 \neq \varnothing$, $G_f^2 \neq \varnothing$, $g(Q) = f(Q) = Q$ *и преобразования* $g(x), f(x)$ *имеют вид* (2)*, а также выполнено* $fg(x) = gf(x)$ *для всех* $x \in Q$*. Тогда оператор* A *нормален.*

Доказательство. По определению, $D(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$. Следовательно, из условия леммы вытекает, что $A_1u, A_2u, A_1^*u, A_2^*u \in D(A)$, если $u \in D(A)$. Поэтому по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы ([9], гл. 2, §5, теорема 5.1) мы получим $D(AA^*) = D(A^*A) = \{u \in W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

В силу леммы 2 остается доказать, что

$$A_0(A_1 + A_2)u + (A_1^* + A_2^*)A_0u = (A_1 + A_2)A_0u + A_0(A_1^* + A_2^*)u, \quad u \in D(AA^*). \tag{5}$$

Это равенство доказывается исходя из того, что преобразования g и f имеют вид (2), учитывая некоторые другие результаты, полученные при доказательстве теорем 1–3.

Пример 4. Покажем, что оператор A не является нормальным при нарушении условия коммутативности преобразований g и f в лемме 3. Рассмотрим область Q и преобразования g и f, построенные в примере 3. Для такого случая выполнены все условия леммы 3, кроме условия коммутативности преобразований. Положим

$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)\xi(x),$$

где $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ — срезающая функция такая, что $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi(x) = 1$ при $x \in Q_{2\varepsilon}$ и $\xi(x) = 0$ при $x \notin Q_\varepsilon$. (Здесь $Q_\varepsilon \subset Q$ и $\operatorname{dist}(\partial Q_\varepsilon, \partial Q) > \varepsilon$.) Очевидно, $u \in \mathcal{D}(AA^*)$, а левая и правая части равенства (5) обращаются в нуль. Тогда нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора $A_1 + A_2$. Поскольку все условия леммы 2, кроме условия коммутативности, также выполнены, то, как показано в примере 3, нормальность оператора $A_1 + A_2$ эквивалентна выполнению равенства (4) при всех $v \in L_2(Q)$, $x \in Q$. Очевидно, что $u \in L_2(Q)$. Выбрав $x = (0,\ 0,\ 1)^T$ и учитывая построения, приведенные в примере 3, получим нарушение равенства (4). Следовательно, оператор A не является нормальным. Таким образом, условие $fg(x) = gf(x)$ $(x \in Q)$ в лемме 3 и теореме 1 существенно.

Автор глубоко благодарен профессору А. Л. Скубачевскому за внимание к этой работе и ценные советы.

References

[1] *Vorontsov M. A., Ivanov V.Yu., and Smalhausen V.I.* Rotary instability in the spatial structure of light fields in nonlinear media with two-dimensional feedback// Laser Optics in Condensed Matter. — 1988. — 507–517.

[2] *Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., and Abernathy R. L.* Diffractive patterns in nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation// Chaos, Solitons and Fractals. — 1994. — **4**. — 1701–1716.

[3] *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом// Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1993. — **33**, № 1. — 69–80.

[4] *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback// Chaos in Optics, Rajarshi Roy ed., Proceedings SPIE 2039. — 1993. — 342–352.

[5] *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений// Успехи мат. наук. — 1996. — **51**, вып. 1(307). — 169–170.

[6] *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equation arising in optoelectronics// Nonlinear Analisys. — 1998. — **32**, № 2. — 261–278.

[7] *Скубачевский А. Л.* О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов// Функциональный анализ и его приложения. — 1997. — **31**, вып. 4. — 60–65.

[8] *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Дифф. уравнения. — 1998. — **34**, № 10. — 1394–1401.

[9] *Лионс Ж., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1972.