НОРМАЛЬНОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ

Варфоломеев Е.М.
Российский университет дружбы народов,
Москва, Россия

1. Введение

В нелинейных оптических системах с преобразованием поля в двумерной обратной связи возникают вращающиеся волновые структуры, используемые для кодирования и передачи информации [13, 14]. Этот эффект описывается бифуркацией Андронова—Хопфа периодических решений квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения, содержащего преобразование пространственных переменных. В работах [2, 6, 10] такая задача рассматривалась в простых пространственных областях с одним преобразованием переменных, наиболее часто используемым на практике: поворотом на постоянный угол и радиальным сжатием. Случай произвольных области $Q \subset \mathbb{R}^2$ и преобразования переменных изучался в работах [7, 11] при условии нормальности линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора задачи. Общий случай без предположения нормальности рассматривался в работах [1, 9].

В работе [8] были получены необходимые и достаточные условия нормальности такого оператора, содержащего одно преобразование переменных. При некоторых условиях было доказано, что оператор нормален тогда и только тогда, когда преобразование переменных принадлежит классу аффинных преобразований с ортогональными матрицами.

Нормальность такого оператора в случае двух преобразований переменных изучалась в работах [3, 4, 12]. Рассматривались различные варианты взаимодействия двух преобразований. В частности, важную роль играет их коммутативность. Результаты работы [8] о классе преобразований, допускающих нормальность, были обобщены при некоторых дополнительных ограничениях на коэффициенты задачи.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия нормальности линеаризованного функционально-дифференциального оператора задачи с любым конечным числом преобразований переменных.

2. Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \subset C^\infty$, $n \geq 2$. Обозначим g_i, $i = 1, \dots, N$, $N \geq 2$, взаимно-однозначные преобразования класса C^3, такие что

$$g_i : V \subset \mathbb{R}^n \to g_i(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad |J_{g_i}(x)| \neq 0, \quad x \in V,$$

где V — ограниченная область, $\overline{Q} \subset V$, $J_{g_i}(x) = [\partial g_{ip}/\partial x_q]^n_{p,q=1}$ — матрица Якоби преобразования g_i, $|J_{g_i}(x)| = |\det J_{g_i}(x)|$, $i = 1, \dots, N$. Будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$g_i(Q) \subset Q, \quad i = 1, \dots, N.$$

Введем неограниченный оператор

$$A_0 : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad A_0 v = \Delta v,$$

с областью определения $D(A_0) = \{v \in W_2^2(Q) : Bv = 0\}$. Здесь $W_2^k(Q)$ обозначает пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе со всеми обобщенными производными вплоть до порядка k включительно, оператор $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v/\partial \nu)|_{\partial Q}$ задает краевые условия, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$.

Как известно, оператор A_0 — самосопряженный. Рассмотрим оператор

$$A : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad A = A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i,$$

где A_i, $i = 1, \ldots, N$, — ограниченные линейные операторы преобразования переменных, определенные на всем пространстве $L_2(Q)$ по формуле

$$A_i : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad A_i v(x) = a_i v(g_i(x)),$$

где $a_i \neq 0$ — вещественные числа, $i = 1, \ldots, N$.

Оператор A называется *нормальным*, если $D(AA^*) = D(A^*A)$ и выполнено

$$AA^* v = A^*Av, \quad v \in D(AA^*).$$

Положим $D(A) = D(A_0)$.

Введем множества $G_{g_i}^m = \{x \in Q : g_i^m(x) \neq x\}$, $m = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, N$. Здесь $g_i^m(x)$ обозначает преобразование g_i, примененное m раз. Будем записывать суперпозицию преобразований в виде $g_i g_j(x)$, $g_i^{-1} g_j(x)$ и т. д.

3. Основные результаты

Сначала введем несколько условий, которые будут использоваться при формулировке теорем.

Условие 1. $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} a_i \neq 0$ для любого подмножества $\mathcal{K} \subset \{1, \ldots, N\}$, такого что $\mathcal{K} \neq \varnothing$.

Условие 2. $g_i(x) \neq g_j^{-1}(x)$ для почти всех $x \in Q$ и всех $i, j = 1, \ldots, N$, $i \neq j$.

Условие 3. $\sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, a_i a_j \neq 0$ для любого множества $\alpha = \{\alpha_{ij}\}_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N}$, такого что $\alpha_{ij} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\alpha \neq \{0\}_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N}$.

Следующие два условия являются более слабыми версиями условий 1 и 3. Положим $1 \leq M \leq N$.

Условие 1^M. $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} a_i \neq 0$ для любого подмножества $\mathcal{K} \subset \{1, \ldots, M\}$, такого что $\mathcal{K} \neq \varnothing$.

Условие 3^M. $\sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{M,N} \alpha_{ij}\, a_i a_j \neq 0$ для любого множества $\alpha = \{\alpha_{ij}\}_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{M,N}$, такого что $\alpha_{ij} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\alpha \neq \{0\}_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{M,N}$.

Основными результатами этой работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$.

(а) *Если оператор* A *— нормальный и выполнены условия* 1 *и* 2, *то*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1}$$

где K_i *— ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.

(б) *Если выполнено свойство* (1) *и*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i, j = 1, \dots, N, \tag{2}$$

то оператор A *— нормальный.*

(в) *Если выполнены условия* 1, 2 *и* 3, *то оператор* A *является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства* (1) *и* (2).

Теорема 2. *Пусть* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = 1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, *и справедливы следующие утверждения*:

(а) *Если оператор* A *— нормальный и выполнено условие* 1, *то*

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \tag{3}$$

а оператор A *является самосопряженным.*

(б) *Если выполнено свойство* (3), *то оператор* A *— самосопряженный.*

Теорема 3. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, M$, *а также* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$, *и справедливы следующие утверждения*:

(а) *Если оператор* A *— нормальный и выполнены условия* 1^M *и* 2, *то*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \tag{4}$$

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = M+1, \dots, N, \tag{5}$$

где K_i *— ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.

(б) *Если выполнены свойства* (4) *и* (5), *а также*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, \tag{6}$$

то оператор A *— нормальный.*

(в) *Если выполнены условия* 1^M, 2 *и* 3^M, *то оператор* A *является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства* (4)–(6).

4. Комментарии

Существенность условий, входящих в состав полученных результатов, для случая двух преобразований пространственных переменных была показана на нескольких контрпримерах в предшествующих работах [3, 12]. В случае произвольного числа преобразований соответствующие контрпримеры строятся аналогично.

В случае более двух преобразований переменных появляется новое условие 3. Оно достаточно громоздко, однако оно выполняется для почти всех векторов $(a_1, \dots, a_N)$, исключая только множество меры нуль в $\mathbb{R}^N$ (конечное число гиперповерхностей). С другой стороны, многие простые наборы коэффициентов $a_1, \dots, a_N$ не удовлетворяют условию 3 (например, коэффициенты $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$). Трудность заключается в том, что условие 3 при больших N практически невозможно проверить: требуется проверить $5^{N(N-1)/2} - 3^{N(N-1)/2}$ неравенств. Условие 3 требуется только для того, чтобы доказать, что свойство (2) в теореме 1 следует из нормальности оператора A. Условие 3^M при $M < N$ является более слабым, чем условие 3, и требуется только для того, чтобы доказать, что свойство (6) в теореме 3 следует из нормальности оператора A.

Рассмотрим пример чисел $a_1, \ldots, a_N$, удовлетворяющих условию 3. Фактически, сформулируем некоторые достаточные условия, при который выполняется условие 3. Используем обозначение $\mathbb{Q}$ для множества рациональных чисел.

Лемма 1. *Пусть числа*

$$n_i = b_0 q^{k_i}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

таковы, что $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1 < k_2 < \ldots < k_N$, $b_0, q \in \mathbb{N}$ *и* $q \geq 3$. *Тогда числа*

$$a_i = \cos n_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяют условию 3.

Лемма 2. *Пусть* $a_1, \ldots, a_N$ *— числа, заданные в лемме* 1. *Тогда для любых* $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_N \in \mathbb{Q}$, $\delta \in \mathbb{Q}$ $(\delta \neq 0)$ *числа*

$$\tilde{a}_i + \delta a_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяют условию 3.

Таким образом, можно взять любой набор рациональных чисел $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_N$, удовлетворяющий или не удовлетворяющий условию 3, и модифицировать его согласно лемме 2 (при этом $\delta \neq 0$ можно выбирать сколь угодно малым). Тогда в силу леммы 2 модифицированный набор чисел $\tilde{a}_1 + \delta a_1, \ldots, \tilde{a}_N + \delta a_N$ будет удовлетворять условию 3.

Следующая лемма показывает, каким образом условие 3^M включено в теорему 3.

Лемма 3. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, M$, *а также* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \ldots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \ldots, N$, *и если оператор* A *нормальный и выполнены условия* 1^M *и* 2, *то*

(1) $g_i(x) = K_i x + b_i$, $x \in Q$, *где* K_i *— ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, M$;
(2) $|J_{g_i}(x)| = 1,\ x \in Q,\ i = M+1, \ldots, N.$

Если, кроме того, выполнено условие 3^M, *то*

(3) $g_i g_i(x) = g_i g_j(x),\ x \in Q,\ i = 1, \ldots, M,\ j = 1, \ldots, N.$

Рассмотрим пример, показывающий, что условие 3^M существенно в лемме 3.

Пример 1. При $N = 3$, $n = 3$ рассмотрим оператор $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$. Положим $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, тогда условие 3^M не выполняется. Возьмем следующие аффинные преобразования с ортогональными матрицами:

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad g_3(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Пусть $x \in Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$. Тогда $g_1(Q) = g_2(Q) = g_3(Q) = Q$ и легко проверить, что

$$g_2^2(x) = x, \quad g_3^2(x) = x, \quad g_2 g_3(x) = g_3 g_2(x), \qquad x \in Q;$$

$$g_1^2(x) \neq x, \quad g_1 g_2(x) \neq g_2 g_1(x), \quad g_1 g_3(x) \neq g_3 g_1(x), \quad x \in Q \backslash \{x : x_1 = 0,\ x_3 = 0\}.$$

В терминах леммы 3 получим, что $G^2_{g_1} = Q \setminus \{x : x_1 = 0, x_3 = 0\} \neq \varnothing$ и $G^2_{g_2} = G^2_{g_3} = \varnothing$. Коэффициенты $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ удовлетворяют условию 1^M. Также легко убедиться в том, что выполнено условие 2 (поскольку матрицы ортогональны, обратные преобразования получаются переходом к транспонированным матрицам).

Докажем, что оператор A нормальный. Очевидно, что для любого $x \in Q$

$$g_1 g_2^{-1}(x) = g_1^{-1} g_3(x), \quad g_2 g_1^{-1}(x) = g_3^{-1} g_1(x), \tag{7}$$

$$g_1 g_3^{-1}(x) = g_2^{-1} g_1(x), \quad g_3 g_1^{-1}(x) = g_1^{-1} g_2(x). \tag{8}$$

Поскольку g_1, g_2, g_3 — аффинные преобразования с ортогональными матрицами, легко показать, что $A_0 A_i u = A_i A_0 u$ и $A_0 A_i^* u = A_i^* A_0 u$, $i = 1, 2, 3$, $u \in D(AA^*)$. Следовательно, нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора $A_1 + A_2 + A_3$ при $u \in D(AA^*)$. Легко проверить, что оператор $A_1 + A_2 + A_3$ является нормальным в силу равенств $g_2 g_3(x) = g_3 g_2(x)$ $(x \in Q)$, (7) и (8).

Таким образом, выполнены все условия леммы 3, кроме условия 3^M. Оператор A является нормальным, однако преобразование g_1 не коммутирует с g_2 и g_3. Следовательно, условие 3^M существенно в лемме 3.

Рассмотрим классы преобразований (1) и (3), заданные теоремами 1–3. Очевидно, что преобразования класса (1) являются также преобразованиями класса (3). Рассмотрим пример, показывающий, что существуют преобразования класса (3), не принадлежащие классу (1).

Пример 2. В соответствии с условиями теоремы 2 построим взаимно-однозначное преобразование g, такое что $g \in C^3$, $g(Q) = Q$, $g^2(x) = x$ и $|J_g(x)| = 1$ для всех $x \in Q$. Положим $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ и рассмотрим преобразование *квазиповорота*

$$\omega : (r, \varphi) \mapsto (r, \hat{\omega}(r, \varphi)),$$

где r и φ — полярные координаты, соответствующие координатам (x_1, x_2). Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

легко показать, что $|J_\omega(r, \varphi)| = \left|\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\omega}(r, \varphi)\right|$. Положим

$$\hat{\omega}(r, \varphi) = \varphi + r^2.$$

Тогда $|J_\omega(r, \varphi)| \equiv 1$. Очевидно, что преобразование ω взаимно-однозначно, $\omega(Q) = Q$, а обратное преобразование $\omega^{-1}(x)$ определяется функцией $\hat{\omega}(r, \varphi) = \varphi - r^2$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\omega \in C^3$. Преобразование ω не принадлежит классу (1).

Обозначим через h взаимно-однозначное преобразование отражения относительно диаметра круга Q. Очевидно, что $h \in C^\infty$, $h(Q) = Q$, а также $h^2(x) = x$ и $|J_h(x)| = 1$ для всех $x \in Q$. Преобразование h принадлежит классу (1).

Тогда преобразование $g = \omega^{-1} h \omega$ обладает всеми требуемыми свойствами, однако не принадлежит классу (1).

В работе [11] построен следующий пример преобразования класса (3), не принадлежащего классу (1). Отметим, что здесь область Q не является кругом.

Пример 3. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, такая что:

(1) если $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_1$, то $(x_1, -x_2) \in \Gamma_1$, где $\Gamma_1 = \{x \in \partial Q : |x_2| \geq 7/4\}$;

(2) множество $\Gamma_2 = \{x \in \partial Q : 0 \le x_2 \le 7/4\}$ состоит из двух отрезков $\{x: \ x_1 = \pm 2, \ 0 \le x_2 \le 7/4\}$;

(3) множество $\Gamma_3 = \{x \in \partial Q : -7/4 \le x_2 \le 0\}$ состоит из двух кривых $\{x : x_1 = \pm 2 + \xi(x_2), \ -7/4 \le x_2 \le 0\}$, где $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ — нечетная функция, такая что $0 \le \xi(t) \le 1/2$, $\xi(t) = 1/2$ при $3/4 \le t \le 5/4$, $\xi(t) = 0$ при $t \in [0, 1/2] \cup [3/2, \infty)$.

Рассмотрим отображение $g(x) = (x_1 - \xi(x_2), -x_2)$. Очевидно, $|J_g(x)| = 1$ и $g^2(x) = x$ для всех $x \in Q$, а также $g \in C^\infty$ и $g(Q) = Q$.

Автор благодарен проф. А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и постоянное внимание. Автор благодарен проф. В. И. Власову и Р. В. Шамину за обсуждение и ряд ценных советов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00256.

References

[1] *Белан Е. П.* О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-дифференциальном уравнении// Ученые записки ТНУ. Сер. мат. мех. информ. и киберн. — 2002. — *2.* — С. 11–23.

[2] *Белан Е. П.*, *Лыкова О. Б.* Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении// Нелінійні коливання. — 2006. — *9*, № 2. — С. 155–169.

[3] *Варфоломеев Е. М.* Нормальность эллиптического функционально-дифференциального оператора с двумя преобразованиями переменных// Spectral and evolution problems. Труды 16-й Крымской осенней математической школы-симпозиума. — 2006. — *16.* — С. 118-122.

[4] *Варфоломеев Е. М.* О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов второго порядка// Успехи мат. наук. — 2006. — *61*, № 1. — С. 173-174.

[5] *Лионс Ж. Л.*, *Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

[6] *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом// Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 1993. — *33*, № 1. — С. 69–80.

[7] *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений// Успехи мат. наук. — 1996. — *51*, № 1 (307). — С. 169-170.

[8] *Скубачевский А. Л.* О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов// Функц. анализ и его прилож. — 1997. — *31*, № 4. — С. 60–65.

[9] *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Дифф. уравн. — 1998. — *34*, № 10. — С. 1394–1401.

[10] *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback// Chaos in Optics. Proc. SPIE, ed. R. Roy. — 1993. — *2039.* — С. 342–352.

[11] Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equation arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — *32*, № 2. — С. 261–278.

[12] *Varfolomeyev E. M.* On the existence of orthonormal basis consisting of eigenfunctions of elliptic functional differential operators// Funct. Differ. Equ. — 2006. — *13*, № 2. — С. 267–304.

[13] *Vorontsov M. A.*, *Iroshnikov N. G.*, *R. L. Abernathy* Diffractive patterns in nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation// Chaos Solitons Fractals. — 1994. — *4.* — С. 1701–1716.

[14] *Vorontsov M. A.*, *Ivanov V. Yu.*, *Smalhausen V. I.* Rotary instability in the spatial structure of light fields in nonlinear media with two-dimensional feedback// Laser Optics in Condensed Matter. — New York, Plenum Press. — 1988. — С. 507–517.