Минобрнауки Российской Федерации

Российский университет дружбы народов

На правах рукописи

Варфоломеев Евгений Михайлович

О некоторых свойствах параболических и несамосопряженных эллиптических функционально-дифференциальных операторов

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор А. Л. Скубачевский

Москва — 2007

Оглавление

Введение

1. В настоящей диссертации изучаются квазилинейные параболические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие конечное число преобразований пространственных переменных, а также соответствующие линеаризованные эллиптические и параболические функционально-дифференциальные операторы.

Параболические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие отклонения по переменной времени, рассматривались в ряде работ, см. [29–31, 36, 40]. Наиболее общий случай таких уравнений с переменными запаздываниями в старших производных исследовался в работах В. В. Власова [8, 9].

Краевые задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами по пространственным переменным изучались в работах А. Л. Скубачевского, Р. В. Шамина и А. М. Селицкого [17, 21, 25, 34].

В диссертационной работе рассматриваются параболические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие произвольные преобразования пространственных переменных. Такие задачи возникают в нелинейной оптике.

В нелинейных оптических системах с преобразованием поля в двумерной обратной связи возникают различные регулярные периодические явления, которые называют многолепестковыми волнами [10, 39]. Эти явления могут использоваться для оптических методов передачи, обработки и хранения информации. Математической моделью некоторого класса таких оптических систем является вторая смешанная задача для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованием пространственных переменных:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = D\Delta u(x,t) + K\bigl(1+\gamma\cos(u(g(x),t))\bigr), \\ &\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\Big|_{\partial Q\times\mathbb{R}} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = u_0(x), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $x \in Q \subset \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, $u(x,t)$ — фазовая модуляция световой волны, $D > 0$, K, γ — некоторые постоянные величины, g — преобразование пространственных переменных, $\widetilde{\nu} = (\nu, 0)$, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q. Возникновение многолепестковых волн происходит в результате бифуркации периодических решений задачи (1) в окрестности пространственно-однородного стационарного решения $w = \mathrm{const}$, определяемого соотношением $w = K(1+\gamma\cos w)$.

Задача (1) изучалась в целом ряде работ. А. В. Разгулиным [14], а также А. Ю. Колесовым, Н. Х. Розовым [12] рассматривалась одномерная модель на окружности, в которой преобразование пространственных переменных g являлось поворотом на некоторый угол. В работе [24] В. А. Чушкина и А. В. Разгулина была решена задача на отрезке, где преобразование g являлось отражением пространственной переменной относительно центра отрезка. А. В. Разгулиным [33] был исследован случай, когда пространственная область Q — круг, а преобразование g — поворот на некоторый постоянный угол. В работе Е. П. Белана [2] рассматривался случай, когда область Q — круг, а преобразование g является суперпозицией преобразований поворота и радиального сжатия. Случай произвольной области Q с гладкой границей и невырожденного взаимно-однозначного преобразования $g \in C^3$ общего вида изучался А. Л. Скубачевским [18, 35] в предположении, что линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор $L : \mathcal{D}(L) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ задачи (1) вида

$$(Lu)(x) = D(\Delta u)(x) - u(x) - K\gamma u(g(x)) \sin w$$

с областью определения $\mathcal{D}(L) = \{u \in W_2^2(Q) : (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$ является нормальным. Кроме того, А. Л. Скубачевским [19] были получены необходимые и достаточные условия нормальности таких операторов. Без предположения нормальности оператора L для произвольной области Q с гладкой границей и достаточно гладкого невырожденного взаимно-однозначного преобразования g общего вида А. Л. Скубачевским [20] было доказано существование бифуркации периодических решений задачи (1) методами исследования бифуркации Андронова—Хопфа в бесконечномерном случае [27, 28]. Е. П. Беланом [1] при таких же предположениях об операторе L, области Q и преобразовании g методом центральных многообразий были получены условия существования и устойчивости бифуркационных решений задачи (1), а также формулы для определения их топологических свойств. В работе А. В. Разгулина [15] была изучена задача управления преобразованием пространственных переменных g в случае, когда Q — произвольная область с гладкой границей, а преобразование g задано в обобщенном виде с помощью некоторого функционала и, вообще говоря, не является обратимым.

В настоящей диссертации рассматривается обобщение задачи (1) на случай конечного числа произвольных достаточно гладких невырожденных взаимно-однозначных преобразований пространственных переменных, а также исследуется нормальность линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора такой задачи и разрешимость первой и второй смешанных задач для линейных параболических функционально-дифференциальных уравнений.

2. Диссертация состоит из введения и трех глав.

В первой главе получены необходимые и достаточные условия нормальности линейных эллиптических функционально-дифференциальных операторов $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ вида

$$(Au)(x) = (\Delta u)(x) + \sum_{i=0}^{N} a_i u(g_i(x))$$

с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$. Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $W_2^k(Q)$ обозначает пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе со всеми обобщенными производными вплоть до порядка k включительно, оператор $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v/\partial \nu)|_{\partial Q}$ задает краевые условия, $a_1, \ldots, a_N$ — вещественные числа, не равные нулю, а $g_1, \ldots, g_N$ — преобразования пространственных переменных, принадлежащие классу

$$\mathcal{G} = \left\{ g \in C^3 : g(Q) \subseteq Q,\ g \text{ взаимно-однозначно},\ |J_g(x)| \neq 0 \ (x \in \overline{Q}) \right\},$$

где $|J_g(x)| = |\det J_g(x)|$, а $J_g(x)$ — матрица Якоби преобразования g.

А. Л. Скубачевским [19] в случае одного преобразования g пространственных переменных ($N = 1$) было доказано, что при некоторых условиях оператор A нормален тогда и только тогда, когда g — ортогональное преобразование.

В диссертации показано, что при наличии нескольких преобразований пространственных переменных $g_1, \ldots, g_N$ между ними могут возникать компенсирующие взаимодействия, благодаря которым оператор A оказывается нормальным в случае преобразований более общего вида. Рассмотрены все случаи таких взаимодействий в терминах групповых свойств преобразований $g_1, \ldots, g_N$. Доказано, что такие взаимодействия возможны лишь при выборе коэффициентов $a_1, \ldots, a_N$ оператора A из некоторого множества меры нуль в $\mathbb{R}^N$ и при наличии пар взаимно обратных преобразований. При соответствующих конструктивных дополнительных условиях, исключающих компенсирующие взаимодействия преобразований $g_1, \ldots, g_N$, доказано, что оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда преобразования $g_1, \ldots, g_N$ являются коммутирующими ортогональными преобразованиями (§ 1.2). Для всех введенных условий построены контрпримеры, показывающие их существенность.

Оператор A имеет компактную резольвенту. Поэтому его нормальность эквивалентна существованию в $L_2(Q)$ ортонормированного базиса, состоящего из собственных функций оператора A (§ 2.2). Опираясь на существование такого базиса, во второй главе диссертации методом Фурье исследованы первая и вторая смешанные задачи для линейных параболических функционально-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x),t) + f(x,t), \tag{2}$$

$(x,t) \in Q \times (0,T)$, содержащих конечное число преобразований пространственных переменных $g_1, \ldots, g_N$, принадлежащих классу $\mathcal{G}$ и удовлетворяющих условиям нормальности оператора A, полученным в первой главе диссертации. Уравнение (2) рассматривается совместно с краевыми условиями первого либо второго рода

$$u\big|_{\partial Q\times(0,T)} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\bigg|_{\partial Q\times(0,T)} = 0 \tag{4}$$

и начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{5}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $\widetilde{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial Q \times (0,T)$, $f \in L_2(Q \times (0,T))$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Оператор A, входящий в правую часть уравнения (2), предполагается нормальным. Для этого используются условия нормальности оператора A, полученные в первой главе диссертации (§ 1.2). Доказано, что спектр оператора A локализован в полуполосе, содержащей отрицательную действительную полуось и конечный отрезок положительной действительной полуоси (§ 2.2).

Для задач (2), (3), (5) и (2), (4), (5) введены понятия обобщенных решений в пространствах Соболева (§ 2.1). Доказаны существование (§ 2.4) и единственность (§ 2.5) обобщенных решений задач (2), (3), (5) и (2), (4), (5). Указан конструктивный метод получения решений в виде разложения в ряд по базису из собственных функций оператора A (§ 2.3), доказана сходимость рядов к обобщенным решениям в анизотропном пространстве Соболева (§ 2.4).

В третьей главе диссертации изучено возникновение бифуркации периодических решений квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+u(x,t)=D\Delta u(x,t)+K\Big(1+\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\cos(u(g_i(x),t))\Big), \qquad (6)$$

$x\in Q$, $t\in\mathbb{R}$, содержащих конечное число преобразований пространственных переменных $g_1,\dots,g_N$, принадлежащих классу $\mathcal{G}$ и удовлетворяющих условиям нормальности оператора Λ, который будет введен ниже. Уравнение (6) рассматривается с краевыми условиями второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial\widetilde{\nu}}\Big|_{\partial Q\times\mathbb{R}}=0, \qquad (7)$$

Здесь $Q\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q\in C^\infty$, $D>0$, $K,\gamma_1,\dots,\gamma_N\in\mathbb{R}$ — постоянные коэффициенты, не равные нулю. Для доказательства существования бифуркации периодических решений задачи (6), (7) используется разложение решений в ряд Фурье по ортонормированному базису в $L_2(Q)$, состоящему из собственных функций линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора $\Lambda:\mathcal{D}(\Lambda)\subset L_2(Q)\to L_2(Q)$ задачи (6), (7) вида

$$(\Lambda u)(x)=D(\Delta u)(x)-u(x)-K\sin w\sum_{i=1}^{N}\gamma_i u(g_i(x))$$

с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda)=\{u\in W_2^2(Q):(\partial u/\partial\nu)\big|_{\partial Q}=0\}$. Здесь $w=\mathrm{const}$ — пространственно-однородное стационарное решение задачи (6), (7), определяемое соотношением $w=K\Big(1+\cos w\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i\Big)$. Предполагается, что оператор Λ нормальный. Тогда такой базис существует в силу компактности резольвенты оператора Λ. Поскольку нормальность оператора Λ эквивалентна нормальности оператора A, введенного выше, то используются условия нормальности оператора A, полученные в первой главе диссертации (§ 1.2). Доказано, что спектр оператора Λ локализован в полуполосе, содержащей отрицательную действительную полуось и, быть может, конечный отрезок положительной действительной полуоси. Существование бифуркационных периодических решений задачи (6), (7) устанавливается с помощью теоремы о неявном операторе (§ 3.4).

Кроме того, в диссертации получены достаточные условия бифуркации периодических решений задачи (6), (7) без предположения нормальности оператора Λ (§ 3.5). Для этого используются методы исследования бифуркации Андронова—Хопфа в бесконечномерных задачах, развитые в работах Крэндалла, Рабиновица [27] и Да Прато, Лунарди [28]. Такой подход позволяет рассматривать преобразования пространственных переменных $g_1, \dots, g_N$ из более широкого класса.

3. Результаты диссертации опубликованы в работах [3–7, 37, 38].

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинаре кафедры общей математики факультета ВМиК МГУ под руководством академика Е. И. Моисеева; на семинаре механико-математического факультета МГУ под руководством проф. А. Г. Костюченко, проф. В. В. Власова и проф. К. А. Мирзоева; на семинаре кафедры математического моделирования МЭИ (ТУ) под руководством проф. Ю. А. Дубинского и проф. А. А. Амосова; на семинаре кафедры прикладной математики–1 МИИТ под руководством проф. А. Д. Мышкиса; на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и математической физики РУДН под руководством проф. А. Л. Скубачевского.

Результаты диссертации докладывались также на 4-й Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, 2005; Крымских осенних математических школах-симпозиумах, Симферополь, 2004, 2005, 2006; XLII Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии, Москва, 2006; Всеукраинской научной конференции молодых ученых и студентов по дифференциальным уравнениям и их применениям, посвященной 100-летнему юбилею Я. Б. Лопатинского, Донецк, 2006.

Глава 1

Нормальность линейных эллиптических функционально-дифференциальных операторов

1.1 Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geqslant 2$. Обозначим g_i, $i = 1, \dots, N$, $N \geqslant 2$, взаимно-однозначные преобразования класса C^3, такие что

$$g_i : V \subset \mathbb{R}^n \to g_i(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad |J_{g_i}(x)| \neq 0, \quad x \in V,$$

где V — ограниченная область, $\overline{Q} \subset V$, $J_{g_i}(x) = [\partial g_{ip}/\partial x_q]_{p,q=1}^n$ — матрица Якоби преобразования g_i, $|J_{g_i}(x)| = |\det J_{g_i}(x)|$, $i = 1, \dots, N$. Будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$g_i(Q) \subseteq Q, \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.1}$$

Введем неограниченный оператор $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле $A_0 v = \Delta v$, $v \in \mathcal{D}(A_0)$, с областью определения $\mathcal{D}(A_0) = \{v \in W_2^2(Q) : Bv = 0\}$. Здесь $W_2^k(Q)$ обозначает пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе со всеми обобщенными производными вплоть до порядка k включительно, оператор $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v/\partial \nu)|_{\partial Q}$ задает краевые условия, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$.

Как известно, оператор A_0 — самосопряженный. Рассмотрим оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$,

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i,$$

где A_i, $i = 1, \dots, N$ — ограниченные линейные операторы преобразования переменных, определенные на всем пространстве $L_2(Q)$ по формуле

$$A_i : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad A_i v(x) = a_i v(g_i(x)),$$

где $a_i \neq 0$ — вещественные числа, $i = 1, \dots, N$.

Положим $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0)$.

Неограниченный оператор T называется *нормальным*, если он замкнут, определен на плотном множестве, $\mathcal{D}(TT^*) = \mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}$ и $TT^*v = T^*Tv$ для всех $v \in \mathcal{D}$.

Введем множества $G_{g_i}^m = \{x \in Q : g_i^m(x) \neq x\}$, $m = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, N$. Здесь $g_i^m(x)$ обозначает преобразование g_i, примененное m раз. Обозначим $\widetilde{G}_{g_i}^m = Q \setminus G_{g_i}^m$. Будем записывать суперпозицию преобразований в виде $g_i g_j(x)$, $g_i^{-1} g_j(x)$ и т. д.

1.2 Необходимые и достаточные условия нормальности

Сначала введем несколько условий, которые будут использоваться при формулировке теорем.

Условие 1.1. $\sum\limits_{i\in\mathcal{K}} a_i \neq 0$ *для любого подмножества* $\mathcal{K} \subseteq \{1,\dots,N\}$, $\mathcal{K} \neq \varnothing$.

Условие 1.2. $g_i(x) \neq {g_j}^{-1}(x)$ *для п. в.* $x \in Q$ *и всех* $i,j = 1,\dots,N$, $i \neq j$.

Условие 1.3. $\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, a_i a_j \neq 0$ *для любых* $\alpha_{ij} \in \{0,\pm1,\pm2\}$, *не равных одновременно нулю.*

Следующие два условия являются более слабыми версиями условий 1.1 и 1.3. Пусть $0 \leqslant M \leqslant N$.

Условие 1.1^M. $\sum\limits_{i\in\mathcal{K}} a_i \neq 0$ *для любого подмножества* $\mathcal{K} \subseteq \{1,\dots,M\}$, $\mathcal{K} \neq \varnothing$.

Условие 1.3^M. $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant M\\ 1\leqslant j\leqslant N\\ i<j}} \alpha_{ij}\, a_i a_j \neq 0$ *для любых* $\alpha_{ij} \in \{0,\pm1,\pm2\}$, *не равных одновременно нулю.*

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1,\dots,N$.

1. *Если оператор* A — *нормальный и выполнены условия* 1.1 *и* 1.2, *то*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1,\dots,N, \tag{1.2}$$

где K_i — *ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.

2. *Если выполнено свойство* (1.2) *и*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i, j = 1, \ldots, N, \tag{1.3}$$

то оператор A — нормальный.

3. *Если выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3, *то оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства* (1.2) *и* (1.3).

Теорема 1.2. *Пусть $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, N$, и справедливы следующие утверждения.*

1. *Если оператор A — нормальный и выполнено хотя бы одно из условий* 1.1, 1.2, *то*

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.4}$$

а оператор A является самосопряженным.

2. *Если выполнено свойство* (1.4), *то оператор A — самосопряженный.*

Теорема 1.3. *Пусть $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ и $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, M$, а также $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M + 1, \ldots, N$. Тогда $g_i(Q) = Q$, $i = M + 1, \ldots, N$, и справедливы следующие утверждения.*

1. *Если оператор A — нормальный и выполнены условия* 1.1^M *и* 1.2, *то*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \ldots, M, \tag{1.5}$$

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = M + 1, \ldots, N, \tag{1.6}$$

где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.

2. *Если выполнены свойства* (1.5) *и* (1.6), *а также*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, \tag{1.7}$$

то оператор A *— нормальный.*

3. *Если выполнены условия* 1.1^M, 1.2 *и* 1.3^M, *то оператор* A *является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства* (1.5)–(1.7).

Существенность используемых условий будет обоснована примерами 1.4, 1.6, 1.8 и 1.9 (см. §§ 1.5, 1.7).

1.3 Комментарии

Теоремы 1.1 и 1.2 являются частными случаями теоремы 1.3 при $M = N$ и $M = 0$ соответственно. В случае $M = 0$ (теорема 1.2) оказалось возможным дополнительно усилить результат теоремы 1.3, заменив нормальность на самосопряженность, а условие 1.2 на условие 1.1.

Теоремы 1.1–1.3 обобщают результаты, полученные для случая одного преобразования пространственных переменных ($N = 1$) в работе [19]. При $N = 1$ обозначим через g единственное преобразование пространственных переменных. Тогда верны следующие утверждения.

Теорема 1.4 (см. [19]). *Пусть* $G_g^2 \neq \varnothing$. *Тогда оператор* A *является нормальным тогда и только тогда, когда*

$$g(Q) = Q, \quad g(x) = Kx + b \quad (x \in Q),$$

где K *— ортогональная матрица размера* $n \times n$, $K^2 \neq E$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.5 (см. [19]). *Пусть* $G_g^2 = \varnothing$. *Тогда оператор* A *является нормальным тогда и только тогда, когда*

$$g(Q) = Q, \quad |J_g(x)| = 1 \quad (x \in Q).$$

Рассмотрим классы преобразований (1.2) и (1.4), описанные в теоремах 1.1–1.3. Очевидно, что преобразования класса (1.2) принадлежат классу (1.4). Рассмотрим примеры, показывающие, что существуют преобразования класса (1.4), не принадлежащие классу (1.2).

Пример 1.1. В соответствии с условиями теоремы 1.2 построим взаимно-однозначное преобразование g, такое что $g \in C^3$, $g(Q) = Q$, $g^2(x) = x$ и $|J_g(x)| = 1$ для всех $x \in Q$. Положим $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ и рассмотрим преобразование *квазиповорота*

$$\omega : (r, \varphi) \mapsto (r, \widehat{\omega}(r, \varphi)),$$

где r и φ — полярные координаты, соответствующие координатам (x_1, x_2). Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

легко показать, что $|J_\omega(r, \varphi)| = \left|\frac{\partial}{\partial \varphi}\widehat{\omega}(r, \varphi)\right|$. Положим

$$\widehat{\omega}(r, \varphi) = \varphi + r^2.$$

Тогда $|J_\omega(r, \varphi)| \equiv 1$. Очевидно, что преобразование ω взаимно-однозначно, $\omega(Q) = Q$, а обратное преобразование $\omega^{-1}(x)$ определяется функцией $\widehat{\omega}(r, \varphi) = \varphi - r^2$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\omega \in C^3$. Преобразование ω не принадлежит классу (1.2).

Обозначим через h взаимно-однозначное преобразование отражения относительно диаметра круга Q. Очевидно, что $h \in C^\infty$, $h(Q) = Q$, а также $h^2(x) = x$ и $|J_h(x)| = 1$ для всех $x \in Q$. Преобразование h принадлежит классу (1.2).

Тогда преобразование $g = \omega^{-1} h \omega$ обладает всеми требуемыми свойствами, однако не принадлежит классу (1.2).

В работе [35] построен следующий пример преобразования класса (1.4), не принадлежащего классу (1.2). Отметим, что здесь область Q не является кругом.

Пример 1.2. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, такая что:

1. если $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_1$, то $(x_1, -x_2) \in \Gamma_1$, где $\Gamma_1 = \{x \in \partial Q : |x_2| \geqslant 7/4\}$;

2. множество $\Gamma_2 = \{x \in \partial Q : 0 \leqslant x_2 \leqslant 7/4\}$ состоит из двух отрезков $\{x : \; x_1 = \pm 2, \, 0 \leqslant x_2 \leqslant 7/4\}$;

3. множество $\Gamma_3 = \{x \in \partial Q : -7/4 \leqslant x_2 \leqslant 0\}$ состоит из двух кривых $\{x : x_1 = \pm 2 + \xi(x_2), \; -7/4 \leqslant x_2 \leqslant 0\}$, где $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ — нечетная функция, такая что $0 \leqslant \xi(t) \leqslant 1/2$, $\; \xi(t) = 1/2$ при $3/4 \leqslant t \leqslant 5/4$, $\xi(t) = 0$ при $t \in [0, 1/2] \cup [3/2, \infty)$.

Рассмотрим отображение $g(x) = (x_1 - \xi(x_2), -x_2)$. Очевидно, $|J_g(x)| = 1$ и $g^2(x) = x$ для всех $x \in Q$, а также $g \in C^\infty$ и $g(Q) = Q$. Отображение g принадлежит классу (1.4), но не принадлежит классу (1.2).

Примеры 1.4, 1.6, 1.8 и 1.9 в §§ 1.5, 1.7 показывают существенность условий 1.1, 1.2 и 1.3^M. В этом разделе рассмотрим более подробно условия 1.3 и 1.3^M.

Условие 1.3 достаточно громоздко, однако оно выполняется для почти всех векторов $(a_1, \ldots, a_N)$, исключая только множество меры нуль в $\mathbb{R}^N$ (конечное число гиперповерхностей). С другой стороны, многие простые наборы коэффициентов $a_1, \ldots, a_N$ не удовлетворяют условию 1.3 (например, коэффициенты $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$). Трудность заключается в том, что условие 1.3 при больших N практически невозможно проверить: речь идет о $5^{N(N-1)/2} - 3^{N(N-1)/2}$ неравенствах. Условие 1.3 требуется только для того, чтобы доказать, что свойство (1.3) в теореме 1.1 следует из нормальности оператора A. Аналогично, условие 1.3^M требуется только для того, чтобы доказать, что свойство (1.7) в теореме 1.3 следует из нормальности оператора A.

Далее в этом разделе мы построим пример чисел $a_1, \ldots, a_N$, удовлетворяющих условию 1.3. Фактически, будут сформулированы некоторые достаточные условия, при который выполняется условие 1.3. Сначала докажем некоторые предложения.

Предложение 1.1. *Пусть* $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, $b_k = b_0 q^k$ — *геометрическая прогрессия в* $\mathbb{R}$ *со знаменателем* $q \geqslant 2$. *Тогда для любой конечной подпоследовательности* $\{b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_N}\}$ $(0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_N < \infty)$ *и любых чисел* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, N$, *таких что*

$$\frac{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |\alpha_i|}{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |\alpha_i|} \leqslant m, \quad 1 \leqslant m \leqslant q - 1,$$

следующая линейная комбинация чисел не обращается в нуль:

$$\alpha_1 b_{k_1} + \alpha_2 b_{k_2} + \ldots + \alpha_N b_{k_N} \neq 0.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$|\alpha_1 b_{k_1} + \alpha_2 b_{k_2} + \ldots + \alpha_{N-1} b_{k_{N-1}}| < |\alpha_N b_{k_N}|. \tag{1.8}$$

Разделим обе части неравенства (1.8) на $|\alpha_N|$. Тогда, используя определение чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$, оценим левую часть неравенства:

$$\left|\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_N} b_{k_i}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_N} b_{k_i}\right| \leqslant m \sum_{i=0}^{N-1} |b_{k_i}|.$$

В силу этой оценки неравенство (1.8) следует из неравенства

$$m \sum_{i=0}^{N-1} |b_{k_i}| < |b_{k_N}|. \tag{1.9}$$

По определению чисел b_k, используя формулу для суммы геометрической прогрессии, неравенство (1.9) преобразуется к виду

$$m \frac{q^{k_N} - 1}{q - 1} < q^{k_N}. \tag{1.10}$$

Обозначим $\varepsilon = q - 1 - m$. Тогда неравенство (1.10) превращается в неравенство $1 - q < \varepsilon(q^{k_N} - 1)$, которое верно, поскольку $q \geqslant 2$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant q - 2$ в силу условия $1 \leqslant m \leqslant q - 1$. □

Используем обозначение $\mathbb{Q}$ для множества рациональных чисел.

Предложение 1.2. *Для любых* $p \in \mathbb{Q}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{Q}$ (*таких что* $\exists \alpha_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant N$) *и* $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_N)$ *выполнено следующее неравенство*:

$$\alpha_1 \cos(n_1) + \alpha_2 \cos(n_2) + \ldots + \alpha_N \cos(n_N) \neq p.$$

Доказательство. Напротив, предположим, что существуют числа $p \in \mathbb{Q}$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ и $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, N$, такие что $n_1 < n_2 < \ldots < n_N$, $\exists \alpha_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant N$, при которых

$$\alpha_1 \cos(n_1) + \alpha_2 \cos(n_2) + \ldots + \alpha_N \cos(n_N) = p.$$

Применяя формулу

$$\cos nx = 2 \cos x \cos(n-1)x - \cos(n-2)x, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

представим $\cos n_i$ как линейную комбинацию $(\cos 1)^{n_i}$, $(\cos 1)^{n_i - 1}, \ldots, 1$ с целыми коэффициентами, $i = 1, \ldots, N$. Тогда получим

$$\widehat{\alpha}_{n_N} (\cos 1)^{n_N} + \widehat{\alpha}_{n_N - 1} (\cos 1)^{n_N - 1} + \ldots + \widehat{\alpha}_1 \cos 1 = \widehat{p}.$$

Это алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами. Оно не является тождеством, поскольку легко видеть, что $\widehat{\alpha}_{n_m} \neq 0$, где $m = \max\{i : \alpha_i \neq 0\}$. Однако $\cos 1$ — трансцендентное число, следовательно, оно не является корнем этого уравнения. Полученное противоречие доказывает предложение. $\square$

Следующее предложение дает пример чисел $a_1, \ldots, a_N$, удовлетворяющих условию 1.3.

Предложение 1.3. *Пусть числа*

$$n_i = b_0 q^{k_i}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

таковы, что $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1 < k_2 < \ldots < k_N$, $b_0, q \in \mathbb{N}$ *и* $q \geqslant 3$. *Тогда числа*

$$a_i = \cos n_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяют условию 1.3.

Доказательство. Рассмотрим сумму из условия 1.3:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, a_i a_j = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, \cos n_i \cos n_j = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} \big(\cos(n_i+n_j) + \cos(n_i-n_j)\big). \tag{1.11}$$

В силу предложения 1.1 из определения чисел $n_1, \ldots, n_N$ следует, что $n_i \pm n_j \neq n_k \pm n_l$ для любых $i, j, k, l = 1, \ldots, N$, $i \neq j$, $k \neq l$, $(i,j) \neq (k,l)$. (Действительно, в обозначениях предложения 1.1 мы имеем $b_{k_i} = n_i$, $q \geqslant 3$, $\alpha_i \in \{\pm 1, \pm 2\}$ и $m = 2$.) Следовательно, при любых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, не равных одновременно нулю, сумма в правой части выражения (1.11) состоит из ненулевого числа косинусов с попарно различными целыми аргументами. Тогда из предложения 1.2 следует, что такая сумма не равна нулю. Таким образом, условие 1.3 выполняется для чисел $a_1, \ldots, a_N$. □

Следующее предложение описывает некоторый класс чисел, удовлетворяющих условию 1.3.

Предложение 1.4. *Пусть* $a_1, \ldots, a_N$ — *числа, заданные в предложении* 1.3. *Тогда для любых* $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_N \in \mathbb{Q}$ *и* $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta \neq 0$, *числа*

$$\widehat{a}_i + \delta a_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяют условию 1.3.

Доказательство. Рассмотрим сумму из условия 1.3 для чисел $\widehat{a}_i + \delta a_i$, $i = 1, \ldots, N$:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij}\, (\widehat{a}_i + \delta a_i)(\widehat{a}_j + \delta a_j) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} \widehat{a}_i \widehat{a}_j + \delta \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} \big(\widehat{a}_i a_j + \widehat{a}_j a_i\big) + \delta^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \alpha_{ij} a_i a_j. \tag{1.12}$$

Первая сумма в правой части является рациональным числом. Таким же образом, как в доказательстве предложения 1.3, представим вторую и третью суммы в виде линейных комбинаций косинусов целых аргументов с рациональными коэффициентами. В силу предложения 1.1 из определения чисел $n_1, \ldots, n_N$ следует, что $n_k \neq n_i \pm n_j$ для любых $i, j, k = 1, \ldots, N$, $i < j$. (Действительно, в обозначениях предложения 1.1 мы имеем $\{b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}\} = \{n_i, n_j, n_k\}$, $q \geqslant 3$, $\alpha_i \in \{\pm 1, \pm 2\}$ и $m = 2$.) Следовательно, вторая сумма порождает линейную комбинацию косинусов с целыми аргументами, не равными ни одному из целых аргументов косинусов в линейной комбинации, порожденной третьей суммой. С другой стороны, при доказательстве предложения 1.3 было показано, что при любых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, не равных одновременно нулю, линейная комбинация косинусов, порожденная третьей суммой, состоит хотя бы из одного косинуса. Таким образом, для любых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$, не равных одновременно нулю, правая часть равенства (1.12) состоит из рационального числа и линейной комбинации с рациональными коэффициентами ненулевого числа косинусов с попарно различными целыми аргументами. Следовательно, в силу предложения 1.2, выражение (1.12) не равно нулю. Это доказывает, что условие 1.3 выполняется для чисел $\widehat{a}_i + \delta a_i$, $i = 1, \ldots, N$. $\square$

Таким образом, можно взять любой набор рациональных чисел $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_N$, удовлетворяющий или не удовлетворяющий условию 1.3, и модифицировать его согласно предложению 1.4 (при этом $\delta \neq 0$ можно выбирать сколь угодно малым). Тогда в силу предложения 1.4 модифицированный набор чисел $\widehat{a}_1 + \delta a_1, \ldots, \widehat{a}_N + \delta a_N$ будет удовлетворять условию 1.3.

1.4 Вспомогательные утверждения

Замечание 1.1. Так как $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A_0^*)$, а линейные операторы $A_i, A_i^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $i = 1, \dots, N$, ограничены, мы имеем $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A_0)$.

Лемма 1.1. *Оператор A_i^*, сопряженный к оператору A_i, $i = 1, \dots, N$, определяется по формуле*

$$A_i^* v(x) = \begin{cases} a_i |J_{g_i^{-1}}(x)| v(g_i^{-1}(x)), & x \in g_i(Q), \\ 0, & x \in Q \setminus g_i(Q), \end{cases}$$

где $|J_{g_i^{-1}}(x)| = |\det J_{g_i^{-1}}(x)|$, а $J_{g_i^{-1}}(x)$ — матрица Якоби преобразования g_i^{-1}.

Доказательство очевидно: достаточно заменить переменную интегрирования в соответствующем скалярном произведении в $L_2(Q)$.

Лемма 1.2. *Если $G_{g_i}^2 = \varnothing$, то $g_i(Q) = Q$.*

Доказательство. Действительно, поскольку $G_{g_i}^2 = \varnothing$, то для любой точки $x \in Q$ мы имеем $x = g_i^2(x)$. Так как преобразование g_i взаимно-однозначно, получим $g_i^{-1}(x) = g_i(x)$. Согласно принятым предположениям, $g_i(Q) \subseteq Q$. Следовательно, любая точка $x \in Q$ имеет прообраз $g_i^{-1}(x) = g_i(x) \in Q$. Таким образом, $g_i(Q) = Q$. $\square$

Лемма 1.3. *Пусть $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, и для любого $x \in Q$ выполнены следующие условия*:

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.13}$$

$$\left\{g_i g_j^{-1}(x),\ g_j g_i^{-1}(x)\right\} = \left\{g_i^{-1} g_j(x),\ g_j^{-1} g_i(x)\right\}, \quad i, j = 1, \dots, N. \tag{1.14}$$

Тогда оператор $\sum\limits_{i=1}^{N} A_i$ — *нормальный.*

Доказательство. Используя лемму 1.1, для любых $v \in L_2(Q)$ и $i, j = 1, \dots, N$ при почти всех $x \in Q$ мы получим

$$A_iA_i^*v(x) = a_i^2 |J_{g_i^{-1}}(g_i(x))| v(x), \qquad A_i^*A_iv(x) = a_i^2 |J_{g_i^{-1}}(x)| v(x),$$
$$A_iA_j^*v(x) = a_ia_i |J_{g_j^{-1}}(g_i(x))| v(g_j^{-1}g_i(x)), \quad A_i^*A_jv(x) = a_ia_j |J_{g_i^{-1}}(x)| v(g_jg_i^{-1}(x)).$$

Так как имеет место $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, из условия (1.13) с помощью известного тождества $|J_f(x)|\,|J_{f^{-1}}(f(x))| = 1$ получим $|J_{g_i^{-1}}(x)| = 1$, $x \in Q$. Тогда для любых $v \in L_2(Q)$ при почти всех $x \in Q$ получим

$$\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} A_i^*\right) v(x) = v(x)\sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} a_ia_j \left(v(g_i^{-1}g_j(x)) + v(g_j^{-1}g_i(x))\right),$$
$$\left(\sum_{i=1}^{N} A_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right) v(x) = v(x)\sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} a_ia_j \left(v(g_ig_j^{-1}(x)) + v(g_jg_i^{-1}(x))\right).$$

Следовательно, в силу условия (1.14) оператор $\sum\limits_{i=1}^{N} A_i$ — нормальный. □

Замечание 1.2. Условие (1.14) означает, что для каждого $x \in Q$ и $i, j = 1, \dots, N$ верна по крайней мере одна из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} g_ig_j^{-1}(x) = g_i^{-1}g_j(x), \\ g_jg_i^{-1}(x) = g_j^{-1}g_i(x), \end{cases} \tag{1.15}$$
$$\begin{cases} g_ig_j^{-1}(x) = g_j^{-1}g_i(x), \\ g_jg_i^{-1}(x) = g_i^{-1}g_j(x). \end{cases} \tag{1.16}$$

Пусть система (1.15) выполнена при некотором $x \in Q$. Поскольку преобразования g_i и g_j взаимно-однозначны и $g_i(Q) = g_j(Q) = Q$, получим: $g_ig_j^{-1}(x) = g_i^{-1}g_j(x)$; $g_i^2g_j^{-1}(x) = g_j(x)$; $g_jg_i^{-2}(y) = g_j^{-1}(y)$, где $y = g_j(x)$; $g_i^{-2}(y) = g_j^{-2}(y)$;

$$g_i^2(z) = g_j^2(z), \quad z = g_j^{-2}(y) = g_j^{-1}(x).$$

Аналогично, если система (1.16) выполнена при некотором $x \in Q$, получим: $g_i g_j^{-1}(x) = g_j^{-1} g_i(x)$; $g_j g_i g_j^{-1}(x) = g_i(x)$; $g_j g_i^{-1} g_j^{-1}(y) = g_i^{-1}(y)$, где $y = g_i(x)$; $g_i^{-1} g_j^{-1}(y) = g_j^{-1} g_i^{-1}(y)$;

$$g_i g_j(z) = g_j g_i(z), \quad z = g_j^{-1} g_i^{-1}(y) = g_j^{-1}(x).$$

Таким образом, условие (1.14) означает, что при каждом $x \in Q$ и $i, j = 1, \ldots, N$ выполнено по крайней мере одно из равенств

$$g_i^2(x) = g_j^2(x), \quad g_i g_j(x) = g_j g_i(x).$$

Пример 1.3. Рассмотрим пример оператора $A_1 + \ldots + A_N$, который не является нормальным, так как преобразования $g_1, \ldots, g_N$ не удовлетворяют условию (1.14) леммы 1.3. Положим $N = 2$, $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4\}$ и рассмотрим преобразования g_1 и g_2, которые являются преобразованиями поворота вокруг осей x_1 и x_2 соответственно:

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Положим $\varphi = \psi = \pi/3$ и выберем точку $x^0 = (0,\ 0,\ 1)^T$. Получим (см. рис. 1.1):

$$g_2^{-1} g_1(x^0) = g_2^{-1}(0,\ -\sqrt{3}/2,\ 1/2)^T = (\sqrt{3}/4,\ -\sqrt{3}/2,\ 1/4)^T,$$
$$g_1 g_2^{-1}(x^0) = g_1(\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)^T = (\sqrt{3}/2,\ -\sqrt{3}/4,\ 1/4)^T,$$
$$g_1^{-1} g_2(x^0) = g_1^{-1}(-\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)^T = (-\sqrt{3}/2,\ \sqrt{3}/4,\ 1/4)^T,$$
$$g_2 g_1^{-1}(x^0) = g_2(0,\ \sqrt{3}/2,\ 1/2)^T = (-\sqrt{3}/4,\ \sqrt{3}/2,\ 1/4)^T.$$

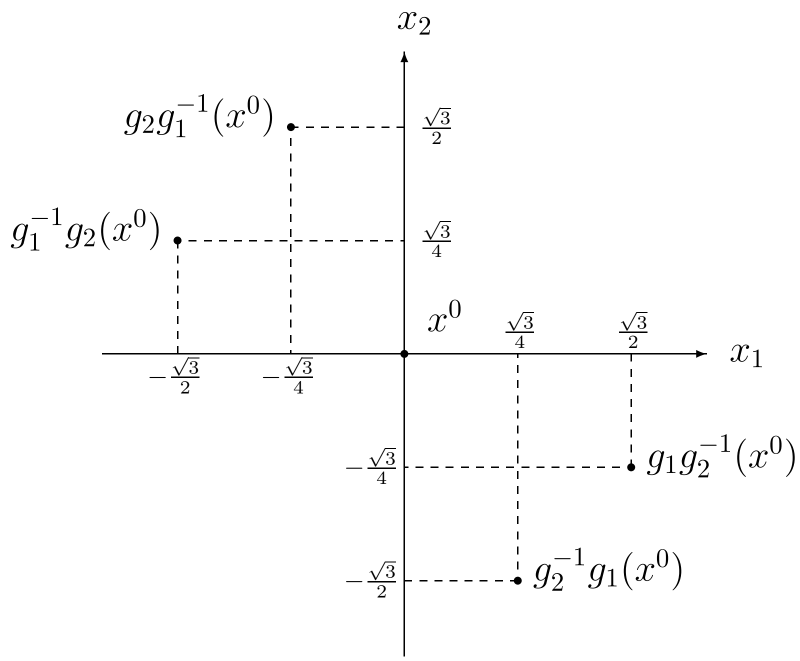

Рис. 1.1

Выполнены все условия леммы 1.3, кроме условия (1.14). Как было показано в доказательстве леммы 1.3, нормальность оператора $A_1 + A_2$ эквивалентна равенству

$$v(g_2^{-1}g_1(x)) + v(g_1^{-1}g_2(x)) = v(g_2 g_1^{-1}(x)) + v(g_1 g_2^{-1}(x)) \qquad (1.17)$$

для всех $v \in L_2(Q)$ при почти всех $x \in Q$. Выберем достаточно малую окрестность $U_\delta(x^0)$ и функцию ξ, такую что $\operatorname{supp}\xi \subset g_2^{-1}g_1(U_\delta(x^0))$. Очевидно, функция ξ не удовлетворяет равенству (1.17) при $x \in U_\delta(x^0)$. Следовательно, оператор $A_1 + A_2$ не является нормальным.

Отметим, что рассмотренные g_1 и g_2 — некоммутирующие ортогональные преобразования. Доказывая лемму 1.5, мы покажем, что для ортогональных преобразований условие (1.14) эквивалентно коммутативности этих преобразований.

1.5 Доказательство теоремы 1.1

Лемма 1.4. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. *Если оператор* A *— нормальный и выполнены условия* 1.1 *и* 1.2, *то*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.18}$$

где K_i *— ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$.

Доказательство. Получим формулу (1.18) для преобразования g_1 (преобразования g_i, $i = 2, \dots, N$, рассматриваются аналогично). По определению, множества $G^m_{g_i}$, $m = 1, 2$, открытые и $G^2_{g_i} \subseteq G^1_{g_i}$, $i = 1, \dots, N$. Выберем точку $x^0 \in G^2_{g_1}$. По определению множества $G^2_{g_1}$, при $x = x^0$ выполнены следующие неравенства:

$$g_1(x) \neq x, \qquad (A1) \qquad\qquad g_1^2(x) \neq x. \qquad (A2)$$

Поскольку $g_i(Q) = Q$, очевидно, что $g_i(\widetilde{G}^2_{g_i}) = \widetilde{G}^2_{g_i}$, откуда $g_i(G^2_{g_i}) = G^2_{g_i}$, $i = 1, \dots, N$. Обозначим $B_\delta(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \delta\}$. Выберем $\delta > 0$, такое что $\overline{B_{2\delta}(x^0)} \subset G^2_{g_1}$ и выполнены следующие условия:

$$B_{2\delta}(x^0) \cap g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \quad (B1) \qquad B_{2\delta}(x^0) \cap g_1^2(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing. \quad (B2)$$

1. Предположим, что при $x = x^0$ и $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$ выполнены следующие неравенства:

$$g_i(x) \neq x, \qquad (A3_i) \qquad\qquad g_1(x) \neq g_i(x), \qquad (A4_i)$$

$$g_1(x) \neq g_i^{-1}(x), \qquad (A5_i) \qquad\qquad g_1^2(x) \neq g_i(x), \qquad (A6_i)$$

$$g_1(x) \neq g_i g_1(x), \qquad (A7_i) \qquad\qquad g_1^{-1}(x) \neq g_i^{-1} g_1(x), \qquad (A8_i)$$

$$g_i(x) \neq g_j g_1(x), \qquad (A9_{ij}) \qquad\qquad g_i^{-1}(x) \neq g_j^{-1} g_1(x). \qquad (A10_{ij})$$

Вследствие непрерывности преобразований g_i, $i = 1, \dots, N$, можно выбрать $\delta > 0$ достаточно малым, чтобы при $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$ удовлетворялись следующие условия:

$$B_{2\delta}(x^0) \cap g_i(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \tag{$B3_i$}$$

$$g_1(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \tag{$B4_i$}$$

$$g_1(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i^{-1}(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \tag{$B5_i$}$$

$$g_1^2(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \tag{$B6_i$}$$

$$g_1(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \tag{$B7_i$}$$

$$g_1^{-1}(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_i^{-1} g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing. \tag{$B8_i$}$$

$$g_i(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_j g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing, \tag{$B9_{ij}$}$$

$$g_i^{-1}(B_{2\delta}(x^0)) \cap g_j^{-1} g_1(B_{2\delta}(x^0)) = \varnothing. \tag{$B10_{ij}$}$$

Далее применим подход, использованный в работе [19]. Введем функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, такую что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = 1$ при $x \in g_1(B_\delta(x^0))$ и $\operatorname{supp} \xi \subset g_1(B_{2\delta}(x^0))$. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — некоторый полином. По определению $g_1, \dots, g_N$ очевидно, что $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ и $u \in \mathcal{D}(A^*A)$. Рассмотрим AA^*u и A^*Au. Используя определение функции ξ и учитывая соотношения $\operatorname{supp}(A_i u) = g_i^{-1}(\operatorname{supp} u)$ и $\operatorname{supp}(A_i^* u) = g_i(\operatorname{supp} u)$, $i = 1, \dots, N$, при $x \in B_\delta(x^0)$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$, мы получим:

$$
\begin{array}{lll}
A_1 A_1^* u(x) = 0, & A_1^* A_1 u(x) = 0 & \text{из условия } (B1); \\
A_i A_i^* u(x) = 0, & A_i^* A_i u(x) = 0 & \text{из условия } (B1); \\
A_0 A_1^* u(x) = 0, & A_1^* A_0 u(x) = 0 & \text{из условия } (B2); \\
A_0 A_i u(x) = 0, & A_i A_0 u(x) = 0 & \text{из условия } (B4_i); \\
A_0 A_i^* u(x) = 0, & A_i^* A_0 u(x) = 0 & \text{из условия } (B5_i);
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
&A_1A_i^*u(x)=0 &&\text{из условия } (B7_i);\\
&A_1^*A_iu(x)=0 &&\text{из условия } (B8_i);\\
&A_iA_1^*u(x)=0 &&\text{из условия } (B6_i);\\
&A_i^*A_1u(x)=0 &&\text{из условия } (B3_i);\\
&A_iA_j^*u(x)=0 &&\text{из условия } (B9_{ij});\\
&A_i^*A_ju(x)=0 &&\text{из условия } (B10_{ij}).
\end{aligned}$$

Так как оператор A нормальный, мы имеем $AA^*u = A^*Au$. Отсюда

$$A_0A_1u(x) = A_1A_0u(x), \quad x \in B_\delta(x^0).$$

Следовательно,

$$\Delta u(g_1(x)) = (\Delta u)(g_1(x)), \quad x \in B_\delta(x^0). \tag{1.19}$$

Дифференцируя сложную функцию $u(g_1(x))$, из уравнения (1.19) мы получим при $x \in B_\delta(x^0)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial^2 u(g_1(x))}{\partial g_{1r}\partial g_{1s}}\frac{\partial g_{1r}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial g_{1s}(x)}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial u(g_1(x))}{\partial g_{1r}}\frac{\partial^2 g_{1r}(x)}{\partial {x_i}^2}=$$
$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial^2 u(g_1(x))}{\partial {g_{1r}}^2}. \tag{1.20}$$

Положим $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$, где $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Тогда из равенства (1.20) при $x = x^B$ получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{1k}(x^B)}{\partial x_i}\right)^2 = 1, \quad k = m = 1, \ldots, n, \tag{1.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_{1k}(x^B)}{\partial x_i}\frac{\partial g_{1m}(x^B)}{\partial x_i} = 0, \quad k, m = 1, \ldots, n, \quad k \neq m. \tag{1.22}$$

Равенства (1.21) и (1.22) можно записать в матричном виде:

$$J_{g_1}(x^B)J_{g_1}^T(x^B) = E. \tag{1.23}$$

Следовательно,

$$J_{g_1}^T(x^B)J_{g_1}(x^B) = E. \tag{1.24}$$

Запишем равенство (1.24) в координатном виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{1i}(x^B)}{\partial x_k}\frac{\partial g_{1i}(x^B)}{\partial x_m} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \qquad k, m = 1, \ldots, n. \tag{1.25}$$

Поскольку точка $x^B \in B_\delta(x^0)$ выбрана произвольно, получим (1.25) для всех $x \in B_\delta(x^0)$. Дифференцируя (1.25) по x_l, $l = 1, \ldots, n$, для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k \partial x_l}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_k}\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_l \partial x_m} = 0. \tag{1.26}$$

Циклически переставляя индексы k, l и m в равенстве (1.26), для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_m \partial x_k}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_m}\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \tag{1.27}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_l \partial x_m}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_l}\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_m \partial x_k} = 0. \tag{1.28}$$

Складывая равенства (1.26) и (1.27) и вычитая равенство (1.28), для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k \partial x_l}\frac{\partial g_{1i}(x)}{\partial x_m} = 0, \quad k, l, m = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, при любых фиксированных k, l и $x \in B_\delta(x^0)$ мы получили однородную систему линейных алгебраических уравнений с детерминантом $\det J_{g_1}(x) \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 g_{1i}(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \quad i, k, l = 1, \ldots, n, \quad x \in B_\delta(x^0). \tag{1.29}$$

Следовательно, $g_{1i}(x)$, $i = 1\ldots,n$ являются линейными функциями переменных $x_1,\ldots,x_n$ в $B_\delta(x^0)$, т. е.

$$g_1(x) = K_1^{x^0}x + b_1^{x^0}, \quad x \in B_\delta(x^0). \tag{1.30}$$

В силу равенства (1.23) матрица $K_1^{x^0}$ ортогональная.

Теперь рассмотрим различные случаи, когда нарушаются неравенства $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i,j = 2,\ldots,N$ $(i \neq j)$. Они обращаются в равенства, а поскольку преобразования g_i, $i = 1,\ldots,N$ — гладкие, такие равенства имеют место на замкнутых множествах. Для каждой граничной точки таких множеств можно построить последовательность внешних точек, имеющую предел в граничной точке. Переходя к пределу, распространим формулу (1.30) на все такие граничные точки. Поэтому ниже мы рассмотрим случаи, когда неравенства $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i,j = 2,\ldots,N$ $(i \neq j)$, нарушаются на замкнутых множествах с непустой внутренностью. Неравенства $(A1)$, $(A2)$ и условия $(B1)$, $(B2)$ остаются верными во всех рассмотренных ниже случаях.

2. Пусть некоторые из неравенств $(A3_i)$, $i = 2,\ldots,N$, нарушаются в окрестности точки $x^0 \in G^2_{g_1}$:

$$g_i(x) = x \ \ \forall x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}, \quad i \in \mathcal{K}_3 \subseteq \{2,\ldots,N\}, \ \ \mathcal{K}_3 \neq \varnothing, \tag{$\overline{A3}$}$$

причем для любых $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$ выполняются неравенства $(A3_i)$ при $i \notin \mathcal{K}_3$, а неравенства $(A4_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i,j = 2,\ldots,N$ $(i \neq j)$, остаются верными. Выберем достаточно малое $\delta > 0$, такое что выполняются условия $(B3_i)$, $i \notin \mathcal{K}_3$, $(B4_i)$–$(B8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i,j = 2,\ldots,N$ $(i \neq j)$. Условия $(B3_i)$, $i \in \mathcal{K}_3$, нарушаются. Введем срезающую функцию ξ в области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства.

Положим $u=\xi P$, где $P(x)$ — полином. Поскольку условия $(B3_i)$, $i\in\mathcal{K}_3$, нарушены, при $x\in B_\delta(x^0)$ мы имеем

$$A_i^*A_1u(x)\neq 0,\quad i\in\mathcal{K}_3.$$

Учитывая $(\overline{A3})$, при $x\in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_i^*A_1u(x)=a_1a_i|J_{g_i^{-1}}(x)|u(g_1g_i^{-1}(x))=a_1a_iu(g_1(x)),\quad i\in\mathcal{K}_3. \tag{1.31}$$

Поскольку оператор A нормальный, так же, как в пункте 1 доказательства, при $x\in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_0A_1u(x)+\sum_{i\in\mathcal{K}_3}A_i^*A_1u(x)=A_1A_0u(x). \tag{1.32}$$

Пусть $P(x)=(x_k-g_{1k}(x^B))(x_m-g_{1m}(x^B))$, где $x^B\in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. При $x\in B_\delta(x^0)$ и $k,m=1,\dots,n$ получим

$$\begin{gathered}u(g_1(x))=(g_{1k}(x)-g_{1k}(x^B))(g_{1m}(x)-g_{1m}(x^B)),\\ \big[u(g_1(x))\big]_{x_i}=g_{1kx_i}(x)(g_{1m}(x)-g_{1m}(x^B))+g_{1mx_i}(x)(g_{1k}(x)-g_{1k}(x^B)),\end{gathered}$$

откуда

$$u(g_1(x))\Big|_{x=x^B}=\big[u(g_1(x))\big]_{x_i}\Big|_{x=x^B}=0. \tag{1.33}$$

Из равенств (1.31) и (1.33) получим

$$A_i^*A_1u(x)\big|_{x=x^B}=0,\quad i\in\mathcal{K}_3.$$

Тогда из уравнения (1.32) вытекает, что

$$A_0A_1u(x)\big|_{x=x^B}=A_1A_0u(x)\big|_{x=x^B}. \tag{1.34}$$

В силу уравнения (1.20) из (1.34) получим соотношения (1.21) и (1.22). Тогда равенства (1.29) получаются так же, как и в пункте 1 доказательства. Таким образом, представление (1.30) остается верным.

3. Пусть некоторые из неравенств $(A4_i)$, $i = 2, \dots, N$, нарушаются в окрестности точки $x^0 \in G^2_{g_1}$:

$$g_1(x) = g_i(x) \ \ \forall x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}, \quad i \in \mathcal{K}_4 \subseteq \{2, \dots, N\}, \ \ \mathcal{K}_4 \neq \varnothing, \quad (\overline{A4})$$

причем для любых $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$ выполняются неравенства $(A4_i)$ при $i \notin \mathcal{K}_4$, а неравенства $(A3_i)$, $(A5_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$, остаются верными. Выберем достаточно малое $\delta > 0$, такое что выполняются условия $(B4_i)$, $i \notin \mathcal{K}_4$, $(B3_i)$, $(B5_i)$–$(B8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$. Условия $(B4_i)$, $i \in \mathcal{K}_4$, нарушаются. Введем срезающую функцию ξ на области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — полином. Поскольку условия $(B4_i)$, $i \in \mathcal{K}_4$, нарушены, при $x \in B_\delta(x^0)$ мы имеем

$$A_0 A_i u(x) \neq 0, \quad A_i A_0 u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_4.$$

Учитывая $(\overline{A4})$, при $x \in B_\delta(x^0)$ и $i \in \mathcal{K}_4$ получим

$$\begin{aligned} A_0 A_i u(x) &= a_i \Delta u(g_i(x)) = a_i \Delta u(g_1(x)), \\ A_i A_0 u(x) &= a_i (\Delta u)(g_i(x)) = a_i (\Delta u)(g_1(x)). \end{aligned}$$

Поскольку оператор A нормальный, так же, как в пункте 1 доказательства, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_0 A_1 u(x) + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} A_0 A_i u(x) = A_1 A_0 u(x) + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} A_i A_0 u(x),$$

откуда

$$\left(a_1 + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} a_i \right) \Delta u(g(x)) = \left(a_1 + \sum_{i \in \mathcal{K}_4} a_i \right) (\Delta u)(g(x)).$$

Так как $1 \notin \mathcal{K}_4$, в силу условия 1.1 получим $a_1 + \sum\limits_{i \in \mathcal{K}_4} a_i \neq 0$. Поэтому имеет место уравнение (1.19). Тогда мы получим формулу (1.30) так же, как в пункте 1 доказательства.

4. В силу условия 1.2 ни одно из неравенств $(A5_i)$, $i = 2, \dots, N$, не может нарушаться на множестве с непустой внутренностью, поэтому следующее свойство не имеет места:

$$g_1(x) = g_i^{-1}(x) \ \ \forall x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}, \quad i \in \mathcal{K}_5 \subseteq \{2, \dots, N\}, \ \ \mathcal{K}_5 \neq \varnothing. \quad (\overline{A5})$$

5. Случаи нарушения остальных неравенств рассматриваются так же, как в пункте 2 доказательства. Действительно, пусть при $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$ имеет место одно из следующих свойств:

$$g_1^2(x) = g_i(x), \qquad i \in \mathcal{K}_6 \subseteq \{2, \dots, N\}, \quad \mathcal{K}_6 \neq \varnothing, \quad (\overline{A6})$$

$$g_1(x) = g_i g_1(x), \qquad i \in \mathcal{K}_7 \subseteq \{2, \dots, N\}, \quad \mathcal{K}_7 \neq \varnothing, \quad (\overline{A7})$$

$$g_1^{-1}(x) = g_i^{-1} g_1(x), \quad i \in \mathcal{K}_8 \subseteq \{2, \dots, N\}, \quad \mathcal{K}_8 \neq \varnothing, \quad (\overline{A8})$$

$$g_i(x) = g_j g_1(x), \qquad (i, j) \in \mathcal{K}_9 \subseteq \{2, \dots, N\} \times \{2, \dots, N\}, \ \ i \neq j, \ \ \mathcal{K}_9 \neq \varnothing, \quad (\overline{A9})$$

$$g_i^{-1}(x) = g_j^{-1} g_1(x), \ \ (i, j) \in \mathcal{K}_{10} \subseteq \{2, \dots, N\} \times \{2, \dots, N\}, \ i \neq j, \ \mathcal{K}_{10} \neq \varnothing. \quad (\overline{A10})$$

Другими словами, неравенства $(A6_i)$, $i \in \mathcal{K}_6$, или $(A7_i)$, $i \in \mathcal{K}_7$, или $(A8_i)$, $i \in \mathcal{K}_8$, или $(A9_{ij})$, $(i, j) \in \mathcal{K}_9$, или $(A10_{ij})$, $(i, j) \in \mathcal{K}_{10}$, нарушены при $x \in B_{2\delta}(x^0)$, причем остальные неравенства из $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$, остаются верными при $x \in B_{2\delta}(x^0)$. Выберем достаточно малое $\delta > 0$, которое удовлетворяет тем условиям $(B3_i)$–$(B8_i)$, $(B9_{ij})$ и $(B10_{ij})$, для которых соответствующие неравенства $(A3_i)$–$(A8_i)$,

$(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ остаются верными при $x \in B_{2\delta}(x^0)$. Введем срезающую функцию ξ на области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$, а $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. При $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\begin{array}{lll}
\text{в случае } (\overline{A6}): & A_i A_1^* u(x) \neq 0, & i \in \mathcal{K}_6; \\
\text{в случае } (\overline{A7}): & A_1 A_i^* u(x) \neq 0, & i \in \mathcal{K}_7; \\
\text{в случае } (\overline{A8}): & A_1^* A_i u(x) \neq 0, & i \in \mathcal{K}_8; \\
\text{в случае } (\overline{A9}): & A_i A_j^* u(x) \neq 0, & (i,j) \in \mathcal{K}_9; \\
\text{в случае } (\overline{A10}): & A_i^* A_j u(x) \neq 0, & (i,j) \in \mathcal{K}_{10}.
\end{array}$$

Применяя лемму 1.1 и свойства $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

в случае $(\overline{A6})$, $i \in \mathcal{K}_6$:

$$A_i A_1^* u(x) = a_1 a_i |J_{g_1^{-1}}(g_i(x))| u(g_1^{-1} g_i(x)) = a_1 a_i |J_{g_1^{-1}}(g_i(x))| u(g_1(x));$$

в случае $(\overline{A7})$, $i \in \mathcal{K}_7$:

$$A_1 A_i^* u(x) = a_1 a_i |J_{g_i^{-1}}(g_1(x))| u(g_i^{-1} g_1(x)) = a_1 a_i |J_{g_i^{-1}}(g_1(x))| u(g_1(x));$$

в случае $(\overline{A8})$, $i \in \mathcal{K}_8$:

$$A_1^* A_i u(x) = a_1 a_i |J_{g_1^{-1}}(x)| u(g_i g_1^{-1}(x)) = a_1 a_i |J_{g_1^{-1}}(x)| u(g_1(x));$$

в случае $(\overline{A9})$, $(i,j) \in \mathcal{K}_9$:

$$A_i A_j^* u(x) = a_i a_j |J_{g_j^{-1}}(g_i(x))| u(g_j^{-1} g_i(x)) = a_i a_j |J_{g_j^{-1}}(g_i(x))| u(g_1(x));$$

в случае $(\overline{A10})$, $(i,j) \in \mathcal{K}_{10}$:

$$A_i^* A_j u(x) = a_i a_j |J_{g_i^{-1}}(x)| u(g_j g_i^{-1}(x)) = a_i a_j |J_{g_i^{-1}}(x)| u(g_1(x)).$$

Используя равенства (1.33), отсюда получим

$$\begin{cases}
A_i A_1^* u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \;\; i \in \mathcal{K}_6; \quad A_1 A_i^* u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \;\; i \in \mathcal{K}_7; \\
A_1^* A_i u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \;\; i \in \mathcal{K}_8; \quad A_i A_j^* u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \;\; (i,j) \in \mathcal{K}_9; \\
A_i^* A_j u(x)\big|_{x=x^B} = 0, \quad (i,j) \in \mathcal{K}_{10}.
\end{cases} \tag{1.35}$$

Поскольку оператор A нормальный, таким же образом, как в пункте 1 доказательства, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\begin{aligned}
&\text{в случае } (\overline{A6}): && A_0A_1u(x) = \sum_{i\in\mathcal{K}_6} A_iA_1^*u(x) + A_1A_0u(x);\\
&\text{в случае } (\overline{A7}): && A_0A_1u(x) = \sum_{i\in\mathcal{K}_7} A_1A_i^*u(x) + A_1A_0u(x);\\
&\text{в случае } (\overline{A8}): && A_0A_1u(x) + \sum_{i\in\mathcal{K}_8} A_1^*A_iu(x) = A_1A_0u(x);\\
&\text{в случае } (\overline{A9}): && A_0A_1u(x) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{K}_9} A_iA_j^*u(x) + A_1A_0u(x);\\
&\text{в случае } (\overline{A10}): && A_0A_1u(x) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{K}_{10}} A_i^*A_ju(x) = A_1A_0u(x).
\end{aligned}$$

Учитывая (1.35), в любом из случаев $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$ мы получим (1.34). В силу уравнения (1.20) из (1.34) получим соотношения (1.21) и (1.22). Тогда равенства (1.29) получаются так же, как и в пункте 1 доказательства. Таким образом, представление (1.30) остается верным.

6. Пусть при всех $x \in B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$ имеет место некоторая комбинация свойств $(\overline{A3})$, $(\overline{A4})$ и $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$. Свойство $(\overline{A5})$ не выполняется, как было доказано в пункте 4 доказательства. В этом случае, объединяя пункты 2, 3 и 5 доказательства, аналогично получим равенство (1.34). В силу уравнения (1.20) из (1.34) получим соотношения (1.21) и (1.22). Тогда равенства (1.29) получаются так же, как и в пункте 1 доказательства. Таким образом, представление (1.30) остается верным.

Следовательно, преобразование g_1 имеет вид (1.30) в окрестности любой точки $x^0 \in G^2_{g_1}$.

7. В пунктах 1–6 доказательства было показано, что при выполнении условий леммы представление (1.30) имеет место в $B_\delta(x^0) \subset G^2_{g_1}$ без допол-

нительных ограничений. Поскольку точка $x^0 \in G^2_{g_1}$ произвольна, получим

$$g_1(x) = K_{1j}x + b_{1j}, \quad x \in G^{2j}_{g_1}, \tag{1.36}$$

где $G^{2j}_{g_1}$ — открытая связная компонента множества $G^2_{g_1}$.

Из $g_1(Q) = Q$ по определению множества $G^2_{g_1}$ вытекает $g_1(G^2_{g_1}) = G^2_{g_1}$. Следовательно, если $x \in G^{2j}_{g_1}$, то $g_1(x) \in G^{2m}_{g_1}$ для некоторого $m = m(j)$. Кроме того, поскольку множество $G^{2j}_{g_1}$ связно, индекс m не зависит от x. Таким образом,

$$g_1^2(x) = K_{1m}K_{1j}x + K_{1m}b_{1j} + b_{1m}, \quad x \in G^{2j}_{g_1}. \tag{1.37}$$

Сначала предположим, что $G^2_{g_1} = Q$. Тогда j принимает единственное значение $j = 1$. Предположим, что $K^2_{1,1} = E$. Тогда $g_1^2(x) = x + K_{1,1}b_{1,1} + b_{1,1}$ при $x \in Q$. Отсюда $K_{1,1}b_{1,1} + b_{1,1} = 0$. Следовательно, $g_1^2(x) = x$ при $x \in Q$. Это противоречит условию $G^2_{g_1} = Q$. Таким образом, если $G^2_{g_1} = Q$, то $g_1(x)$ имеет вид (1.18), где $K_1 = K_{1,1}$ и $K_1^2 \neq E$.

Теперь предположим, что $\widetilde{G}^2_{g_1} \neq \varnothing$. Тогда $\partial G^2_{g_1} \cap Q = \partial \widetilde{G}^2_{g_1} \cap Q$. Рассмотрим множество $\partial G^2_{g_1} \cap Q$. Выберем точку $z \in \partial G^{2j}_{g_1} \cap Q$. Переходя в равенстве (1.37) к пределу при $x \to z$ $(x \in G^{2j}_{g_1})$, получим

$$K_{1m}K_{1j}z + K_{1m}b_{1j} + b_{1m} = z. \tag{1.38}$$

Если $K_{1m}K_{1j} = E$, то $K_{1m}b_{1j} + b_{1m} = 0$. Отсюда $g_1^2(x) = x$ при $x \in G^{2j}_{g_1}$. Это противоречит определению множества $G^{2j}_{g_1}$. Следовательно, множество $\partial G^{2j}_{g_1} \cap Q$ принадлежит гиперплоскости размерности $r \leqslant n-1$, где r — кратность собственного значения $\lambda = 1$ матрицы $K_{1m}K_{1j} \neq E$. (В случае $r = n$ мы получили бы $K_{1m}K_{1j} = E$, поскольку матрица $K_{1m}K_{1j}$ ортогональна.) Если $\lambda = 1$ не является собственным значением матрицы $K_{1m}K_{1j}$, то множество $\partial G_{g_1}^{2j}\cap Q$ состоит из одной точки. Согласно исходному предположению, $g_1\in C^3$. С другой стороны, $g_1^2(x)$ — кусочно-аффинная функция в Q. Следовательно, $\widetilde{G}_{g_1}^2\subseteq \partial G_{g_1}^2$. Таким образом, $g_1(x)$ также является кусочно-аффинной функцией в Q. Следовательно, $g_1(x)$ имеет вид (1.18) при всех $x\in Q$. Более того, поскольку $K_{1j}=K_{1m}=K_1$, получим, что $r\leqslant n-2$ и множество $G_{g_1}^2$ состоит из одной компоненты связности[1]. $\square$

Пример 1.4. Рассмотрим пример, показывающий, что условие 1.2 существенно в лемме 1.4. При $N=2$ рассмотрим оператор $A=A_0+A_1+A_2$. Положим $a_1=a_2=a$. Выберем взаимно-однозначное преобразование g_1, такое что $g_1(Q)=Q$ и $|J_{g_1}(x)|\equiv 1$, $x\in Q$. Тогда $|J_{g_1^{-1}}(x)|\equiv 1$, $x\in Q$. Положим $g_2(x)\equiv g_1^{-1}(x)$, $x\in Q$. Тогда $g_2(Q)=Q$ и $|J_{g_2}(x)|\equiv|J_{g_2^{-1}}(x)|\equiv 1$, $x\in Q$. Применяя лемму 1.1, для любых $v\in\mathcal{D}(A)$ и почти всех $x\in Q$ мы получим

$$
\begin{aligned}
A^*v(x) = A_0^*v(x)+A_1^*v(x)+A_2^*v(x) &= \\
= \Delta v(x)+a|J_{g_1^{-1}}(x)|v(g_1^{-1}(x))+a|J_{g_2^{-1}}(x)|v(g_2^{-1}(x) &= \\
= \Delta v(x)+av(g_2(x))+av(g_1(x)) &= Av(x).
\end{aligned}
$$

Оператор A является самосопряженным, следовательно, нормальным. Покажем, что преобразования g_1 и g_2 могут не принадлежать классу (1.18). Действительно, положим $n=2$ и в единичном шаре $Q=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1^2+x_2^2<1\}$ рассмотрим преобразование *квазиповорота*

$$g:(r,\varphi)\mapsto(r,\widehat{g}(r,\varphi)),$$

[1]Докажем, что $r\leqslant n-2$. Пусть матрица K_1 имеет спектр $\sigma(K_1)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\lambda_i\}$, где $|\lambda_i|=1$ вследствие ортогональности матрицы. Тогда $\sigma(K_1^2)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\lambda_i^2\}$. Поскольку $K_1^2\neq E$, $\exists\lambda_s^2\neq 1$, т. е. $\exists\lambda_s\neq\pm1$. Это значит, что $\operatorname{Im}\lambda_s\neq 0$, следовательно, $\exists\lambda_m=\overline{\lambda}_s$ (так как K_1 вещественна) и $\lambda_m^2\neq 1$. Таким образом, существуют два собственных значения матрицы K_1^2, не равные 1, откуда $r\leqslant n-2$.

где r и φ — полярные координаты, соответствующие координатам (x_1, x_2). Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

легко показать, что $|J_g(r,\varphi)| = \left|\frac{\partial}{\partial \varphi}\widehat{g}(r,\varphi)\right|$. Положим

$$\widehat{g}(r,\varphi) = \varphi + r^2.$$

Тогда $|J_g(r,\varphi)| \equiv 1$. Очевидно, что преобразование g взаимно-однозначно, $g(Q) = Q$, а обратное преобразование $g^{-1}(x)$ определяется функцией $\widehat{g}(r,\varphi) = \varphi - r^2$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $g \in C^3$.

Положим $g_1 = g$ и $g_2 = g^{-1}$. Таким образом, преобразования g_1 и $g_2 = g_1^{-1}$ удовлетворяют всем условиям леммы 1.4, кроме условия 1.2. Они не имеют вид (1.18) несмотря на то, что оператор A нормальный.

Замечание 1.3. Легко доказать, что вводя в примере 1.4 преобразования $g_3, \ldots, g_N$ поворота в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие всем условиям леммы 1.4, включая условие 1.2, мы получим нормальный оператор A с преобразованиями g_1 и g_2, построенными в примере 1.4. Это показывает, что и в таком случае условие 1.2 является существенным в лемме 1.4. Более того, мы получим такой же результат для аналогичных преобразований поворота и квазиповорота вокруг одной оси в $\mathbb{R}^n$.

Предложение 1.5. *Пусть числа* $C_1, \ldots, C_N \in \mathbb{R}$ *отличны от нуля и удовлетворяют условию* 1.1:

$$\forall \mathcal{K} \subseteq \{1, \ldots, N\} \quad \sum_{i \in \mathcal{K}} C_i \neq 0 \quad \textit{при} \quad \mathcal{K} \neq \varnothing. \tag{1.39}$$

Пусть $\overline{Q} \subset V \subset \mathbb{R}^n$ *и непрерывные отображения* $f_1, \dots, f_N, h_1, \dots, h_N : V \to V$, *такие что* $f_1(Q), \dots, f_N(Q), h_1(Q), \dots, h_N(Q) \subseteq Q$, *для любого* $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ *и любого* $x \in Q$ *удовлетворяют уравнению*

$$\sum_{i=1}^{N} C_i u(f_i(x)) = \sum_{i=1}^{N} C_i u(h_i(x)). \tag{1.40}$$

Тогда:

1. $\forall x \in Q$ *следующие множества точек совпадают*[2]:

$$\{f_1(x), \dots, f_N(x)\} = \{h_1(x), \dots, h_N(x)\};$$

2. *если* $f_i(x^0) \neq f_j(x^0)$ *для всех* $i, j = 1, \dots, N$ $(i \neq j)$ *при некотором* $x^0 \in Q$, *то из равенства* $f_m(x^0) = h_l(x^0)$ *следует, что* $C_m = C_l$;

3. *пусть* $f_m(x^0) = h_l(x^0)$ *при некотором* $x^0 \in Q$. *Тогда*

$$\sum_{i \in \mathcal{K}_f^m} C_i = \sum_{i \in \mathcal{K}_h^l} C_i, \tag{1.41}$$

где

$$\mathcal{K}_f^m = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N,\ f_i(x^0) = f_m(x^0)\},$$
$$\mathcal{K}_h^l = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N,\ h_i(x^0) = h_l(x^0)\}.$$

Доказательство. Первое утверждение не означает, что множества функций $\{f_1, \dots, f_N\}$ и $\{h_1, \dots, h_N\}$ совпадают. Например, первое утверждение выполнено для функций $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = -x_1$ и $h_1(x) = |x_1|$, $h_2(x) = -|x_1|$ при любых $x \in \mathbb{R}^n$.

[2] Если некоторые точки участвуют в записи больше одного раза, то такая запись определяет одно и то же множество, например: $\{1, 1, 2\} = \{2, 2, 1\} = \{1, 2\}$.

1. Предположим, что первое утверждение неверно. Тогда для некоторого $x^0 \in Q$ имеет место $\{f_1(x^0), \ldots, f_N(x^0)\} \neq \{h_1(x^0), \ldots, h_N(x^0)\}$. Без ограничения общности предположим, что

$$S(x^0) = \{f_1(x^0), \ldots, f_N(x^0)\} \setminus \{h_1(x^0), \ldots, h_N(x^0)\} \neq \varnothing.$$

Рассмотрим любую точку $f_{k_1}(x^0) \in S(x^0)$. В общем случае $\{k_1\} \subseteq \mathcal{K}_f^{k_1}$, где $\mathcal{K}_f^{k_1} = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N,\ f_i(x^0) = f_{k_1}(x^0)\}$. Пусть $B_\delta(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \delta\}$. Обозначим

$$U_\delta = \bigcup_{i \in \mathcal{K}_f^{k_1}} f_i(B_\delta(x^0)).$$

Поскольку отображения $f_1, \ldots, f_N$ и $h_1, \ldots, h_N$ непрерывны, существует $\delta > 0$, такое что $f_i(x) \in S(x)$ для всех $i \in \mathcal{K}_f^{k_1}$ при любом $x \in B_{2\delta}(x^0)$ и

$$U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^{N} h_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing, \qquad U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{i \notin \mathcal{K}_f^{k_1}} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing.$$

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$, такую что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ для любого $x \in Q$, $\xi(x) = 1$ при $x \in U_\delta$, и $\operatorname{supp} \xi \subset U_{2\delta}$. Полагая $u = \xi$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$C_1 u(f_1(x)) + \ldots + C_N u(f_N(x)) = \sum_{i \in \mathcal{K}_f^{k_1}} C_i, \quad C_1 u(h_1(x)) + \ldots + C_N u(h_N(x)) = 0.$$

В силу условия (1.39) это противоречит уравнению (1.40), откуда следует справедливость первого утверждения.

2. Докажем второе утверждение. Из первого утверждения следует, что если $f_i(x^0) \neq f_j(x^0)$ при некотором $x^0 \in Q$ для всех $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j)$, то $h_i(x^0) \neq h_j(x^0)$ для всех $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j)$. Рассмотрим некоторую функцию f_m, $1 \leqslant m \leqslant N$. В силу первого утверждения существует

единственная функция h_l, такая что $f_m(x^0) = h_l(x^0)$, $1 \leqslant l \leqslant N$. Обозначим $U_\delta = f_m(B_\delta(x^0)) \cup h_l(B_\delta(x^0))$. Поскольку отображения $f_1, \dots, f_N$ и $h_1, \dots, h_N$ непрерывны, существует такое число $\delta > 0$, что

$$U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing, \qquad U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{N} h_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing.$$

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$, такую что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при всех $x \in Q$, $\xi(x) = 1$ при $x \in U_\delta$ и $\operatorname{supp} \xi \subset U_{2\delta}$. Полагая $u = \xi$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$C_1 u(f_1(x)) + \ldots + C_N u(f_N(x)) = C_m, \qquad C_1 u(h_1(x)) + \ldots + C_N u(h_N(x)) = C_l.$$

Из равенства (1.40) получим $C_m = C_l$, что доказывает второе утверждение.

3. Третье утверждение является простым обобщением второго. Обозначим

$$U_\delta = \bigcup_{i\in\mathcal{K}_f^m} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \cup \bigcup_{i\in\mathcal{K}_h^l} h_i(B_{2\delta}(x^0)).$$

Выберем $\delta > 0$ достаточно малым, чтобы

$$U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1\\ i\notin\mathcal{K}_f^m}}^{N} f_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing, \qquad U_{2\delta} \cap \left\{ \bigcup_{\substack{i=1\\ i\notin\mathcal{K}_h^l}}^{N} h_i(B_{2\delta}(x^0)) \right\} = \varnothing.$$

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$, такую что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при всех $x \in Q$, $\xi(x) = 1$ при $x \in U_\delta$ и $\operatorname{supp} \xi \subset U_{2\delta}$. Полагая $u = \xi$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$C_1 u(f_1(x)) + \ldots + C_N u(f_N(x)) = \sum_{i\in\mathcal{K}_f^m} C_i,$$

$$C_1 u(h_1(x)) + \ldots + C_N u(h_N(x)) = \sum_{i\in\mathcal{K}_h^l} C_i.$$

Из равенства (1.40) получим (1.41), что доказывает третье утверждение.

□

Лемма 1.5. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. *Если оператор* A *нормальный и выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3, *то*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x) \quad \forall x \in Q, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Доказательство. Предположения этой леммы повторяют предположения леммы 1.4 с добавлением условия 1.3.

В силу леммы 1.4 преобразования $g_1, \dots, g_N$ имеют вид (1.18).

По определению, $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$. Вследствие того, что $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, а преобразования $g_1 \dots, g_N$ имеют вид (1.18), получим $A_1 u, \dots, A_N u \in \mathcal{D}(A)$, $A_1^* u, \dots, A_N^* u \in \mathcal{D}(A)$ при $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы [13, теорема 5.1, § 5, гл. 2] получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

Вследствие нормальности оператора A для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ имеем

$$\left(A_0 + \sum_{i=1}^N A_i\right)\left(A_0 + \sum_{i=1}^N A_i^*\right)u = \left(A_0 + \sum_{i=1}^N A_i^*\right)\left(A_0 + \sum_{i=1}^N A_i\right)u. \quad (1.42)$$

Из соотношений (1.18) следует, что равенства (1.21), (1.22) тождественно выполняются в Q для всех преобразований $g_1, \dots, g_N$. Тогда, записывая равенство (1.20) для каждого преобразования $g_1, \dots, g_N$, для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$A_0 A_i u = A_i A_0 u, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.43)$$

С другой стороны, $g_i^{-1}(y) = K_i^{-1} y - K_i^{-1} b_i$, $i = 1, \dots, N$. Поскольку матрицы K_i^{-1} также ортогональны, из равенств (1.21), (1.22), записанных для обратных преобразований $g_1^{-1}, \ldots, g_N^{-1}$, и тождеств $|J_{g_i^{-1}}(x)| \equiv 1$ для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$A_0 A_i^* u = A_i^* A_0 u, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.44}$$

Учитывая (1.43) и (1.44), из равенства (1.42) для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$\Bigl(\sum_{i=1}^{N} A_i\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^{N} A_i^*\Bigr)u = \Bigl(\sum_{i=1}^{N} A_i^*\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^{N} A_i\Bigr)u.$$

Применяя лемму 1.1 и тождества $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $i = 1, \ldots, N$, для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} a_i a_j \bigl(u(g_i^{-1} g_j(x)) + u(g_j^{-1} g_i(x))\bigr) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} a_i a_j \bigl(u(g_i g_j^{-1}(x)) + u(g_j g_i^{-1}(x))\bigr). \tag{1.45}$$

В терминах предложения 1.5 равенство (1.45) содержит функции $f_1 = g_1^{-1} g_2$, $f_2 = g_2^{-1} g_1$, $\ldots$, $f_{N(N-1)} = g_N^{-1} g_{N-1}$ в левой части, функции $h_1 = g_1 g_2^{-1}$, $h_2 = g_2 g_1^{-1}$, $\ldots$, $h_{N(N-1)} = g_N g_{N-1}^{-1}$ в правой части и коэффициенты $C_1 = C_2 = a_1 a_2$, $C_3 = C_4 = a_1 a_3$, $\ldots$, $C_{N(N-1)-1} = C_{N(N-1)} = a_{N-1} a_N$. Из условия 1.3 следует, что условие (1.39) выполнено. Тогда согласно первому утверждению предложения 1.5 для любого $x \in Q$ имеет место $\{f_1(x), \ldots, f_{N(N-1)}(x)\} = \{h_1(x), \ldots, h_{N(N-1)}(x)\}$. С другой стороны, в силу условия 1.3 равенство (1.41) выполняется только в случае $p = q$ и $\{C_{m_1}, \ldots, C_{m_p}\} = \{C_{l_1}, \ldots, C_{l_p}\}$ (в отличие от первого утверждения предложения 1.5, здесь имеется в виду строгое совпадение множеств). Таким образом, для любых $i, j = 1, \ldots, N$ и $x \in Q$ верна по крайней мере одна из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} g_i^{-1}g_j(x) = g_i g_j^{-1}(x), \\ g_j^{-1}g_i(x) = g_j g_i^{-1}(x), \end{cases} \qquad (1.46) \qquad \begin{cases} g_i^{-1}g_j(x) = g_j g_i^{-1}(x), \\ g_j^{-1}g_i(x) = g_i g_j^{-1}(x). \end{cases} \qquad (1.47)$$

Как было показано в замечании 1.2, из системы (1.46) следует $g_i^2(x) = g_j^2(x)$, а из системы (1.47) следует $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$.

Докажем, что для любых $i, j = 1, \ldots, N$ по крайней мере одно из равенств $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ и $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ выполнено для всех $x \in Q$. Действительно, поскольку преобразования $g_1, \ldots, g_N$ имеют вид (1.18), каждое рассматриваемое равенство в координатной форме являются системой линейных уравнений. Решением такой системы является гиперплоскость размерности $n - r$, где r — ранг матрицы системы. Очевидно, что если каждая точка $x \in Q$ является решением по крайней мере одной из двух систем линейных уравнений, то по крайней мере одна система имеет матрицу нулевого ранга. Следовательно, хотя бы одно из равенств $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ и $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ выполняется тождественно в Q.

Докажем, что для любых $i, j = 1, \ldots, N$ из тождества $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ ($x \in Q$) следует тождество $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ ($x \in Q$). Действительно, поскольку g_i и g_j имеют вид (1.18), из тождества $g_i^2(x) = g_j^2(x)$ ($x \in Q$) следует $K_i^2 = K_j^2$. Так как матрица K_i^2 ортогональна, она может быть записана в виде $K_i^2 = S_i^{-1} U_i S_i$, где S_i — некоторая ортогональная матрица, $\det S_i \neq 0$, а матрица $U_i = \mathrm{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{in})$ — диагональная с собственными значениями матрицы K_i^2 на главной диагонали, причем $|\lambda_{ik}| = 1$, $k = 1, \ldots, n$. Матрица U_i определена с точностью до перестановки диагональных элементов, а матрица S_i определена с точностью до перестановки строк. Положим $Q_i = S_i^{-1}V_iS_i$, где $V_i = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_{i1}}, \sqrt{\lambda_{i2}}, \dots, \sqrt{\lambda_{in}})$. Очевидно, что $Q_i^2 = K_i^2$ и Q_i — ортогональная матрица, определенная с точностью до выбора одного из пары значений каждого из корней $\sqrt{\lambda_{i1}}, \dots, \sqrt{\lambda_{in}}$. Докажем, что не существует других ортогональных матриц с квадратами, равными K_i^2. Действительно, предположим, что существует ортогональная матрица P_i, такая что $P_i \neq Q_i$ и $P_i^2 = K_i^2$. Тогда $P_i = T_i^{-1}W_iT_i$, где $W_i = \operatorname{diag}(\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{in})$, $|\mu_{ik}| = 1$, $k = 1, \dots, n$. Отсюда $P_i^2 = T_i^{-1}\operatorname{diag}(\mu_{i1}^2, \mu_{i2}^2, \dots, \mu_{in}^2)T_i = K_i^2$. Поскольку представление $K_i^2 = S_i^{-1}U_iS_i$ единственно с точностью до перестановки диагональных элементов матрицы U_i и строк матрицы S_i, отсюда следует, что $\{\mu_{i1}^2, \mu_{i2}^2, \dots, \mu_{in}^2\} = \{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}\}$ и матрицы T_i и S_i совпадают с точностью до перестановки строк. Следовательно, $P_i = Q_i$. Таким образом, из равенства $K_i^2 = K_j^2$ следует, что $K_i = S_i^{-1}\operatorname{diag}(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in})S_i$ и $K_j = S_i^{-1}\operatorname{diag}(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in})S_i$, где $\gamma_{ik}^2 = \delta_{ik}^2 = \lambda_{ik}$, $k = 1, \dots, n$. Отсюда $K_iK_j = K_jK_i$. Тогда из соотношений (1.18) получим $g_ig_j(x) = g_jg_i(x) + h$ для всех $x \in Q$, где $h = K_ib_j + b_i - (K_jb_i + b_j)$. Поскольку $g_ig_j(Q) = g_jg_i(Q) = Q$, получим $h = 0$ и $g_ig_j(x) = g_jg_i(x)$ для всех $x \in Q$. $\square$

Пример 1.5. Преобразованиями вида (1.18), удовлетворяющими тождеству $gf(x) = fg(x)$, являются преобразования поворота вокруг одной оси в $\mathbb{R}^3$. Тождества $gf(x) = fg(x)$ и $g^2(x) = f^2(x)$ одновременно выполняются для преобразований поворота вокруг одной оси в $\mathbb{R}^3$ на углы α и $\pi + \alpha$.

Лемма 1.6. *Пусть* $G_{g_i}^2 \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. *Если преобразования* $g_1, \dots, g_N$ *имеют вид* (1.18) *и равенства* $g_ig_j(x) = g_jg_i(x)$, $i, j = 1, \dots, N$, *выполнены для всех* $x \in Q$, *то оператор* A *нормальный.*

Доказательство. По определению, $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$.

Следовательно, поскольку $g_i(Q) = Q$ и преобразования $g_1, \dots, g_N$ имеют вид (1.18), получим $A_1 u, \dots, A_N u \in \mathcal{D}(A)$, $A_1^* u, \dots, A_N^* u \in \mathcal{D}(A)$ при $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы [13, теорема 5.1, §5, гл. 2] получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

Поскольку преобразования $g_1, \dots, g_N$ имеют вид (1.18), условие (1.13) леммы 1.3 выполняется. Справедливость условия (1.14) леммы 1.3 следует из соотношений $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ для всех $x \in Q$, $i, j = 1, \dots, N$. Тогда в силу леммы 1.3 оператор $A_1 + \ldots + A_N$ нормальный. Следовательно, достаточно доказать, что для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$

$$A_0\left(\sum_{i=1}^N A_i\right)u + \left(\sum_{i=1}^N A_i^*\right)A_0 u = \left(\sum_{i=1}^N A_i\right)A_0 u + A_0\left(\sum_{i=1}^N A_i^*\right)u. \tag{1.48}$$

Таким же образом, как в доказательстве леммы 1.5, получим (1.43) и (1.44), откуда следует (1.48). □

Пример 1.6. Рассмотрим пример, показывающий, что условие 1.1 существенно в лемме 1.4. Выберем числа $a_1, \dots, a_N$ так, что при некотором $\mathcal{K} \subseteq \{1, \dots, N\}$ выполнено $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} a_i = 0$. Рассмотрим преобразования $g_1, \dots, g_N$, такие что $G_{g_i}^2 \neq \varnothing$ и $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. Положим $g_i = g$ для всех $i \in \mathcal{K}$, где $g(x)$ — некоторое *не аффинное* преобразование. В любом случае мы получим

$$Au(x) = \Delta u + \sum_{i \notin \mathcal{K}} a_i u(g_i(x)).$$

Пусть преобразования g_i, $i \notin \mathcal{K}$, имеют вид (1.18) и являются вращениями вокруг одной оси в $\mathbb{R}^n$. Тогда преобразования g_i, $i \notin \mathcal{K}$, удовлетворяют всем условиям леммы 1.6, следовательно, в силу этой леммы оператор A

нормальный. Выбирая не равные по модулю углы вращения и подходящее преобразование $g(x)$, добьемся выполнения условия 1.2 в лемме 1.4.

Таким образом, все предположения леммы 1.4, кроме условия 1.1, выполнены, а преобразования $g_i = g$, $i \in \mathcal{K}$, не имеют вид (1.18).

Пример 1.7. Рассмотрим пример, показывающий, что условие коммутативности преобразований $g_1, \ldots, g_N$ существенно в лемме 1.6. Рассмотрим область Q, оператор A и преобразования g_1 и g_2, введенные в примере 1.3. В таком случае выполняются все условия леммы 1.6, кроме условия коммутативности. Из доказательства леммы 1.6 следует, что нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора A_1+A_2 для любых $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Положим $u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)\xi(x)$, где $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})^3$ — срезающая функция, такая что $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\xi(x) = 1$ при $x \in Q_{2\varepsilon}$ и $\xi(x) = 0$ при $x \notin Q_\varepsilon$. (Здесь $Q_\varepsilon \subset Q$, $\operatorname{dist}(\partial Q_\varepsilon, \partial Q) = \varepsilon$.) Очевидно, что $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Поскольку выполняются все условия леммы 1.3, кроме условия (1.14), в силу примера 1.3 получим, что оператор $A_1 + A_2$ нормален тогда и только тогда, когда равенство (1.17) выполнено при почти всех $x \in Q$. Выбирая $x^0 = (0,\ 0,\ 1)^T$ и учитывая вычисления из примера 1.3, мы видим, что равенство (1.17) нарушается, по крайней мере, в окрестности точки x^0. Следовательно, при таких условиях оператор A не является нормальным.

Доказательство теоремы 1.1 следует из лемм 1.4, 1.5 и 1.6.

1.6 Доказательство теоремы 1.2

Лемма 1.7. *Пусть $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, N$, и если оператор A нормальный и выполнено хотя бы одно из усло-*

вий 1.1, 1.2, *то*

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.49}$$

Доказательство. Из условия $G^2_{g_i} = \varnothing$ по лемме 1.2 получим $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$.

Чтобы доказать равенства (1.49), применим метод, использованный в доказательстве леммы 1.4. Приведем доказательство для преобразования g_1 (преобразования $g_2, \dots, g_N$ рассматриваются аналогично). Выберем точку $x^0 \in Q$. Отметим, что поскольку $G^2_{g_i} = \varnothing$, имеет место равенство $g_i^{-1}(x) \equiv g_i(x)$ для всех $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$. Следовательно, свойства $(A3_i)$ и $(A6_i)$ совпадают, так же как и свойства $(A4_i)$ и $(A5_i)$, $(A7_i)$ и $(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$. Обозначим их как $(A3_i,A6_i)$, $(A4_i,A5_i)$, $(A7_i,A8_i)$ и $(A9_{ij},A10_{ij})$.

1. Пусть при $x = x^0$ выполнены условия $(A1)$, $(A3_i,A6_i)$, $(A4_i,A5_i)$, $(A7_i,A8_i)$ и $(A9_{ij},A10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$. Условие $(A2)$ не выполняется, так как $g_i^2(x) \equiv x$, $i = 1, \dots, N$. Выберем достаточно малое $\delta > 0$, такое что выполняются условия $(B1)$, $(B3_i,B6_i)$, $(B4_i,B5_i)$, $(B7_i,B8_i)$ и $(B9_{ij},B10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$.

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, такую что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = 1$ при $x \in g_1(B_\delta(x^0))$ и $\operatorname{supp} \xi \subset g_1(B_{2\delta}(x^0))$. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — полином. Из определения $g_1, \dots, g_N$ следует $u \in \mathcal{D}(A^*A)$. Рассмотрим AA^*u и A^*Au. Используя нормальность оператора A (т. е. равенство (1.42)), определение функции u и условия $(B1)$, $(B3_i,B6_i)$, $(B4_i,B5_i)$, $(B7_i,B8_i)$ и $(B9_{ij},B10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$, так же, как в пункте 1 доказательства леммы 1.4 (с тем отличием, что нарушается условие $(B2)$), для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_1 A_0 u(x) + A_0 A_1^* u(x) = A_0 A_1 u(x) + A_1^* A_0 u(x),$$

где

$$
\begin{aligned}
&A_1A_0u(x) = a_1(\Delta u)(g_1(x)),\\
&A_0A_1u(x) = a_1\Delta\big(u(g_1(x))\big),\\
&A_0A_1^*u(x) = a_1\Delta\left(\left|J_{g_1^{-1}}(x)\right| u(g_1^{-1}(x))\right) = a_1\Delta\left(|J_{g_1}(x)|\, u(g_1(x))\right),\\
&A_1^*A_0u(x) = a_1\left|J_{g_1^{-1}}(x)\right|(\Delta u)(g_1^{-1}(x)) = a_1|J_{g_1}(x)|(\Delta u)(g_1(x)).
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$\Delta\Big(\big(|J_{g_1}(x)|-1\big)u(g_1(x))\Big) = \big(|J_{g_1}(x)|-1\big)(\Delta u)(g_1(x)), \quad x\in B_\delta(x^0).$$

Используя формулу

$$\Delta[v(x)w(x)] = \Delta v(x)w(x) + 2(\nabla v(x), \nabla w(x)) + v(x)\Delta w(x),$$

для любого $x\in B_\delta(x^0)$ получим

$$
\begin{aligned}
\big(|J_{g_1}(x)|-1\big)\Delta u(g_1(x)) + \sum_{i=1}^{n}\Bigg(2\frac{\partial|J_{g_1}(x)|}{\partial x_i}\frac{\partial u(g_1(x))}{\partial x_i} + \frac{\partial^2|J_{g_1}(x)|}{\partial x_i^2}u(g_1(x))\Bigg) =\\
= \big(|J_{g_1}(x)|-1\big)(\Delta u)(g_1(x)).
\end{aligned}
$$

Пусть $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$, где $k,m = 1,\dots,n$ и $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Учитывая равенства (1.33), получим

$$\Big(\big(|J_{g_1}(x)|-1\big)\Delta u(g_1(x))\Big)\Big|_{x=x^B} = \Big(\big(|J_{g_1}(x)|-1\big)(\Delta u)(g_1(x))\Big)\Big|_{x=x^B}. \quad (1.50)$$

Следовательно, имеет место либо $|J_{g_1}(x^B)| = 1$, либо

$$\Delta u(g_1(x))\Big|_{x=x^B} = (\Delta u)(g_1(x))\Big|_{x=x^B}.$$

Поскольку точка $x^B\in B_\delta(x^0)$ произвольна, в первом случае мы получим

$$|J_{g_1}(x)| = 1 \quad \forall x\in B_\delta(x^0). \quad (1.51)$$

Во втором случае, используя равенство (1.20), получим (1.21) и (1.22). Тогда из (1.23) получим (1.51) так же, как в пункте 1 доказательства леммы 1.4.

2. Как было указано в доказательстве леммы 1.4, вследствие того, что $|J_{g_1}(x)| \in C^2(\overline{Q})$, достаточно рассмотреть случаи, когда условия $(A1)$, $(A3_i,A6_i)$, $(A4_i,A5_i)$, $(A7_i,A8_i)$ и $(A9_{ij},A10_{ij})$ нарушаются на множествах с непустой внутренностью.

Прежде всего отметим, что если условие $(A1)$ нарушается для любого $x \in B_\delta(x^0)$, т. е. $g_1(x) = x$ в $B_\delta(x^0)$, то равенство (1.51) выполняется тривиальным образом.

3. Если выполнено условие 1.2, то условия $(A4_i,A5_i)$, $i = 2,\dots,N$, не могут нарушаться на множествах с непустой внутренностью.

Пусть выполнено условие 1.1 и некоторые из условий $(A4_i,A5_i)$, $i = 2,\dots,N$, нарушаются в окрестности точки x^0:

$$\begin{cases} g_1(x) = g_i(x), \\ g_1(x) = g_i^{-1}(x) \end{cases} \quad \forall x \in B_{2\delta}(x^0), \;\; i \in \mathcal{K}_{45} \subseteq \{2,\dots,N\}, \;\; \mathcal{K}_{45} \neq \varnothing, \tag{$\overline{A4, A5}$}$$

причем остальные условия $(A4_i,A5_i)$, $i \notin \mathcal{K}_{45}$, выполняются при $x \in B_{2\delta}(x^0)$, а условия $(A1)$, $(A3_i,A6_i)$, $(A7_i,A8_i)$ и $(A9_{ij},A10_{ij})$, $i,j = 2,\dots,N$ $(i \neq j)$, сохраняются. Выберем достаточно малое $\delta > 0$, такое что выполняются условия $(B1)$, $(B4_i,B5_i)$, $i \notin \mathcal{K}_{45}$, $(B3_i,B6_i)$, $(B7_i,B8_i)$ и $(B9_{ij},B10_{ij})$, $i,j = 2,\dots,N$ $(i \neq j)$. Условия $(B4_i,B5_i)$, $i \in \mathcal{K}_{45}$, нарушаются. Введем срезающую функцию ξ в области $g_1(B_{2\delta}(x^0))$ так же, как в пункте 1 доказательства. Положим $u = \xi P$, где $P(x) = (x_k - g_{1k}(x^B))(x_m - g_{1m}(x^B))$ и $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Поскольку нарушены условия

$(B4_i, B5_i)$, $i \in \mathcal{K}_{45}$, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_0 A_i u(x) \neq 0, \quad A_i A_0 u(x) \neq 0, \quad A_0 A_i^* u(x) \neq 0, \quad A_i^* A_0 u(x) \neq 0, \quad i \in \mathcal{K}_{45}.$$

Учитывая соотношения $(\overline{A4, A5})$, при $i \in \mathcal{K}_{45}$ для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\begin{aligned}
&A_0 A_i u(x) = a_i \Delta u(g_i(x)) = a_i \Delta u(g_1(x)),\\
&A_i A_0 u(x) = a_i (\Delta u)(g_i(x)) = a_i (\Delta u)(g_1(x)),\\
&A_0 A_i^* u(x) = a_i \Delta \left(\left| J_{g_i^{-1}(x)} \right| u(g_i^{-1}(x)) \right) = a_i \Delta(|J_{g_1(x)}| u(g_1(x))),\\
&A_i^* A_0 u(x) = a_i \left| J_{g_i^{-1}(x)} \right| (\Delta u)(g_i^{-1}(x)) = a_i |J_{g_1(x)}| (\Delta u)(g_1(x)).
\end{aligned}$$

Поскольку оператор A нормальный, так же, как в пункте 1 доказательства, при $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\sum_{i \in \mathcal{K}_{45} \cup \{1\}} (A_0 A_i u(x) + A_0 A_i^* u(x)) = \sum_{i \in \mathcal{K}_{45} \cup \{1\}} (A_i A_0 u(x) + A_i^* A_0 u(x)).$$

Преобразуя это уравнение так же, как в пункте 1 доказательства, учитывая предыдущие соотношения и (1.33), получим

$$\left(\sum_{i \in \mathcal{K}_{45} \cup \{1\}} a_i \right) \Big((|J_{g_1}(x)| - 1) \Delta u(g_1(x)) \Big) \Big|_{x = x^B} =$$
$$= \left(\sum_{i \in \mathcal{K}_{45} \cup \{1\}} a_i \right) \Big((|J_{g_1}(x)| - 1)(\Delta u)(g_1(x)) \Big) \Big|_{x = x^B}.$$

Поскольку $1 \notin \mathcal{K}_{45}$, в силу условия 1.1 получим равенство (1.50). Тогда равенство (1.51) следует аналогичным образом.

4. Если условия $(A3_i, A6_i)$, $(A7_i, A8_i)$ и $(A9_{ij}, A10_{ij})$ нарушаются в некоторой комбинации, то такой случай рассматривается так же, как в пунктах 5, 6 доказательства леммы 1.4. Единственное отличие в том, что теперь

условие $(B2)$ не выполняется. В результате, используя соотношения (1.33), мы получим

$$(A_1A_0u(x) + A_0A_1^*u(x))\big|_{x=x^B} = (A_0A_1u(x) + A_1^*A_0u(x))\big|_{x=x^B},$$

откуда получим равенство (1.50) и, следовательно, (1.51).

Таким образом, имеет место $|J_{g_1}(x)| = 1$ при почти всех $x \in Q$. Поскольку $|J_{g_1}(x)| \in C^2(\overline{Q})$, получим $|J_{g_1}(x)| = 1$ для любого $x \in Q$. □

Лемма 1.8. *Пусть* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = 1, \ldots, N$. *Если*

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \ldots, N,$$

то оператор A *самосопряженный.*

Доказательство. Из предположений леммы следует, что $g_i(x) = g_i^{-1}(x)$, $x \in Q$, $i = 1, \ldots, N$. С помощью леммы 1.1 получим, что $A_i = A_i^*$, $i = 1, \ldots, N$. Поскольку оператор A_0 самосопряженный, то оператор A также самосопряженный. В частности, оператор A является нормальным. □

Доказательство теоремы 1.2 следует из лемм 1.7 и 1.8.

1.7 Доказательство теоремы 1.3

Лемма 1.9. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, M$, *а также* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \ldots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \ldots, N$. *Если при этом оператор* A *нормальный и выполнены условия* 1.1^M *и* 1.2, *то*

1. $g_i(x) = K_ix + b_i$, $x \in Q$, *где* K_i — *ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, M$;

2. $|J_{g_i}(x)| = 1,\ x \in Q,\ i = M+1, \dots, N.$

Доказательство. Поскольку $G^2_{g_i} = \varnothing$, из леммы 1.2 следует $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$.

Докажем первое утверждение леммы. Приведем доказательство для преобразования g_1 (преобразования $g_2, \dots, g_M$ рассматриваются аналогично). Как и в доказательстве леммы 1.4, выберем точку $x^0 \in G^2_{g_1}$. В этой точке выполнены условия $(A1)$ и $(A2)$. Существует окрестность $B_{2\delta}(x^0) \subset G^2_{g_1}$, удовлетворяющая свойствам $(B1)$ и $(B2)$.

1. Так же, как в пункте 1 доказательства леммы 1.4, предположим, что условия $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ выполняются в точке x^0, следовательно, существует достаточно малое $\delta > 0$, такое что выполняются свойства $(B3_i)$–$(B8_i)$, $(B9_{ij})$ и $(B10_{ij})$, $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$. Поскольку $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \dots, N$, имеем $g_i(x) \equiv g_i^{-1}(x)$, $x \in Q$, $i = M+1, \dots, N$. Следовательно, условия $(A4_i)$ и $(A5_i)$ совпадают при $i = M+1, \dots, N$ а также условия $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ совпадают при $i, j = M+1, \dots, N$ $(i \neq j)$. Таким образом, свойства $(B4_i)$ и $(B5_i)$, $(B9_{ij})$ и $(B10_{ij})$ совпадают при $i, j = M+1, \dots, N$ $(i \neq j)$.

Справедливы все дальнейшие рассуждения из пункта 1 доказательства леммы 1.4. В соответствии с ними преобразование g_1 оказывается аффинным в окрестности $B_\delta(x^0)$ точки x^0 и удовлетворяет соотношению (1.30).

2. Как и в доказательстве леммы 1.4, рассмотрим различные случаи нарушения условий $(A3_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$ на множестве с непустой внутренностью при некоторых $i, j = 2, \dots, N$ $(i \neq j)$.

Если имеет место случай $(\overline{A3})$, то он рассматривается так же, как в пункте 2 доказательства леммы 1.4.

Пусть выполнено соотношение $(\overline{A4})$. Имеем $\mathcal{K}_4 \subseteq \{1, \ldots, M\}$, так как из условия 1.2 и тождеств $g_i^{-1}(x) \equiv g_i(x)$, $i = M+1, \ldots, N$, следует, что $g_1(x) \neq g_i(x)$ при почти всех $x \in Q$, $i = M+1, \ldots, N$. Следовательно, в силу условия 1.1^M случай $(\overline{A4})$ рассматривается так же, как в пункте 3 доказательства леммы 1.4.

Условия $(A5_i)$, $i = 1, \ldots, N$, остаются выполненными в силу условия 1.2, поэтому соотношение $(\overline{A5})$ не имеет места.

Если выполнено одно из соотношений $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$, то такой случай рассматривается так же, как в пункте 5 доказательства леммы 1.4.

Любая возможная комбинация соотношений $(\overline{A3})$, $(\overline{A4})$ и $(\overline{A6})$–$(\overline{A10})$ рассматривается так же, как в пункте 6 доказательства леммы 1.4.

3. Из пункта 7 доказательства леммы 1.4 следует, что преобразование $g_1(x)$ имеет вид (1.18) при всех $x \in Q$. Повторяя рассуждения пунктов 1–3 настоящего доказательства для преобразований $g_2, \ldots, g_M$, получим первое утверждение леммы.

Докажем второе утверждение леммы. Приведем доказательство для преобразования g_{M+1} (преобразования $g_{M+2}, \ldots, g_N$ рассматриваются аналогично). Обозначим через $(A1)^{M+1}$, $(A2)^{M+1}$, $(A4_i)^{M+1}$–$(A8_i)^{M+1}$, $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$ условия $(A1)$, $(A2)$, $(A4_i)$–$(A8_i)$, $(A9_{ij})$ и $(A10_{ij})$, в которых g_1 заменено на g_{M+1}, $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j,\ \ i, j \neq M+1)$.

Выберем точку $x^0 \in Q$. Отметим, что поскольку $g_i^{-1}(x) \equiv g_i(x)$, $x \in Q$, $i = M+1, \ldots, N$, условия $(A3_i)$ и $(A6_i)^{M+1}$ совпадают при $i = 1, \ldots, N$. Также при $i = M+1, \ldots, N$ совпадают следующие условия: $(A4_i)^{M+1}$ и $(A5_i)^{M+1}$, $(A7_i)^{M+1}$ и $(A8_i)^{M+1}$. Кроме того, при $i, j = M+1, \ldots, N$ совпадают условия $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$.

4. Предположим, что при $x = x^0$ выполняются условия $(A1)^{M+1}$, $(A3_i)$, $(A4_i)^{M+1}$–$(A8_i)^{M+1}$, $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$, $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j,\ \ i, j \neq M+1)$. Условие $(A2)^{M+1}$ не выполняется, поскольку $g^2_{M+1}(x) \equiv x$. Выберем достаточно малое $\delta > 0$, такое что выполняются соответствующие условия $(B1)^{M+1}$, $(B3_i)$, $(B4_i)^{M+1}$–$(B8_i)^{M+1}$, $(B9_{ij})^{M+1}$ и $(B10_{ij})^{M+1}$, $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j,\ \ i, j \neq M+1)$.

Введем срезающую функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, такую что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = 1$ при $x \in g_{M+1}(B_\delta(x^0))$ и $\operatorname{supp} \xi \subset g_{M+1}(B_{2\delta}(x^0))$. Положим $u = \xi P$, где $P(x)$ — некоторый полином. По определению преобразований $g_1, \ldots, g_N$ очевидно, что $u \in \mathcal{D}(A^*A)$. Рассмотрим AA^*u и A^*Au. Поскольку оператор A нормальный (т. е. выполнено равенство (1.42)), в силу определения функции u и условий $(B1)^{M+1}$, $(B3_i)$, $(B4_i)^{M+1}$–$(B8_i)^{M+1}$, $(B9_{ij})^{M+1}$ и $(B10_{ij})^{M+1}$, $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j,\ \ i, j \neq M+1)$, так же, как в пункте 1 доказательства леммы 1.4 (с тем отличием, что нарушается условие $(B2)^{M+1}$), для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$A_{M+1}A_0u(x) + A_0A^*_{M+1}u(x) = A_0A_{M+1}u(x) + A^*_{M+1}A_0u(x),$$

где

$$\begin{aligned}
A_{M+1}A_0u(x) &= a_{M+1}(\Delta u)(g_{M+1}(x)),\\
A_0A_{M+1}u(x) &= a_{M+1}\Delta\big(u(g_{M+1}(x))\big),\\
A_0A^*_{M+1}u(x) &= a_{M+1}\Delta\left(|J_{g_{M+1}}(x)|u(g_{M+1}(x))\right),\\
A^*_{M+1}A_0u(x) &= a_{M+1}|J_{g_{M+1}}(x)|(\Delta u)(g_{M+1}(x)).
\end{aligned}$$

Отсюда для любого $x \in B_\delta(x^0)$ будем иметь

$$\Delta\big[\big(|J_{g_{M+1}}(x)| - 1\big)u(g_{M+1}(x))\big] = \big(|J_{g_{M+1}}(x)| - 1\big)(\Delta u)(g_{M+1}(x)).$$

Используя формулу

$$\Delta[v(x)w(x)] = \Delta v(x)w(x) + 2(\nabla v(x), \nabla w(x)) + v(x)\Delta w(x),$$

для любого $x \in B_\delta(x^0)$ получим

$$\big(|J_{g_{M+1}}(x)| - 1\big)\Delta u(g_{M+1}(x)) + \sum_{i=1}^{n}\Bigg(2\frac{\partial |J_{g_{M+1}}(x)|}{\partial x_i}\frac{\partial u(g_{M+1}(x))}{\partial x_i} + \\ + \frac{\partial^2 |J_{g_{M+1}}(x)|}{\partial x_i^2}u(g_{M+1}(x))\Bigg) = \big(|J_{g_{M+1}}(x)| - 1\big)(\Delta u)(g_{M+1}(x)).$$

Пусть $P(x) = (x_k - [g_{M+1}]_k(x^B))(x_m - [g_{M+1}]_m(x^B))$, где $k, m = 1, \ldots, n$ а $x^B \in B_\delta(x^0)$ — фиксированная точка. Тогда аналогично соотношениям (1.33) мы получим

$$u(g_{M+1}(x))\Big|_{x=x^B} = \big[u(g_{M+1}(x))\big]_{x_i}\Big|_{x=x^B} = 0. \tag{1.52}$$

Из двух последних равенств вытекает

$$\Big[\big(|J_{g_{M+1}}(x)| - 1\big)\Delta u(g_{M+1}(x))\Big]\Big|_{x=x^B} = \Big[\big(|J_{g_{M+1}}(x)| - 1\big)(\Delta u)(g_{M+1}(x))\Big]\Big|_{x=x^B}. \tag{1.53}$$

Следовательно, имеет место либо $|J_{g_{M+1}}(x^B)| = 1$, либо

$$\Delta u(g_{M+1}(x))\Big|_{x=x^B} = (\Delta u)(g_{M+1}(x))\Big|_{x=x^B}.$$

Поскольку точка $x^B \in B_\delta(x^0)$ произвольна, в первом случае мы имеем

$$|J_{g_{M+1}}(x)| = 1 \quad \forall x \in B_\delta(x^0). \tag{1.54}$$

Во втором случае, заменяя g_1 на g_{M+1} в равенстве (1.20), мы получим (1.21), (1.22) и (1.23), где g_1 заменено на g_{M+1}. Тогда мы также приходим к свойству (1.54).

5. Как было указано в доказательстве леммы 1.4, в силу того, что $|J_{g_{M+1}}(x)| \in C^2(\overline{Q})$, теперь достаточно рассмотреть только случаи, когда

условия $(A1)^{M+1}$, $(A3_i)$, $(A4_i)^{M+1}$–$(A8_i)^{M+1}$, $(A9_{ij})^{M+1}$ и $(A10_{ij})^{M+1}$ нарушаются на множестве с непустой внутренностью.

Во-первых, если условие $(A1)^{M+1}$ нарушается для любого $x \in B_\delta(x^0)$, т. е. $g_{M+1}(x) = x$ в $B_\delta(x^0)$, то свойство (1.54) выполняется тривиальным образом.

Случай $(\overline{A3})$ рассматривается так же, как в пункте 2 доказательства леммы 1.4 в сочетании с пунктом 4 настоящего доказательства, с заменой g_1 на g_{M+1}.

Случай $(\overline{A4})^{M+1}$ не реализуется, так как в силу тождества $g_{M+1}(x) \equiv g_{M+1}^{-1}(x)$ и условия 1.2 имеет место $g_{M+1}(x) \neq g_i(x)$ при почти всех $x \in Q$ и всех $i = 1, \ldots, N$, $i \neq M+1$.

Условия $(A5_i)^{M+1}$, $i = 1, \ldots, N$, не нарушаются в силу условия 1.2, поэтому случай $(\overline{A5})^{M+1}$ не реализуется.

Любой из случаев $(\overline{A6})^{M+1}$–$(\overline{A10})^{M+1}$ рассматривается так же, как в пункте 5 доказательства леммы 1.4 в сочетании с пунктом 4 настоящего доказательства, с заменой g_1 на g_{M+1} и применением равенства (1.52).

Любая возможная комбинация случаев $(\overline{A3}), (\overline{A4})^{M+1}, (\overline{A6})^{M+1}$–$(\overline{A10})^{M+1}$ рассматривается так же, как в пункте 6 доказательства леммы 1.4 в сочетании с пунктом 4 настоящего доказательства. Единственное отличие в том, что нарушается условие $(B2)$. В результате, используя равенства (1.52), в любом случае придем к равенству

$$(A_{M+1}A_0u(x) + A_0A_{M+1}^*u(x))\big|_{x=x^B} = (A_0A_{M+1}u(x) + A_{M+1}^*A_0u(x))\big|_{x=x^B},$$

откуда получим (1.53) и, следовательно, (1.54).

Таким образом, при почти всех $x \in Q$ имеет место $|J_{g_{M+1}}(x)| = 1$. В силу того, что $|J_{g_{M+1}}(x)| \in C^2(\overline{Q})$, получим $|J_{g_{M+1}}(x)| = 1$ для любого

$x \in Q$. Повторяя пункты 4, 5 настоящего доказательства для преобразований $g_{M+2}, \dots, g_N$, получим второе утверждение леммы. $\square$

Лемма 1.10. *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, M$, *а также* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$, *и если оператор* A *нормальный и выполнены условия* 1.1^M, 1.2 *и* 1.3^M, *то*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N. \tag{1.55}$$

Доказательство. Предположения этой леммы повторяют предположения леммы 1.9 с добавлением условия 1.3^M.

По лемме 1.9 получим

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \tag{1.56}$$

где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, а также

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad g_i(Q) = Q, \quad i = M+1, \dots, N. \tag{1.57}$$

По определению, $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$. В силу того, что $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, а преобразования $g_1 \dots, g_N$ имеют вид (1.56), (1.57), получим, что $A_1 u, \dots, A_N u, A_1^* u, \dots, A_N^* u \in \mathcal{D}(A)$ при $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы [13, теорема 5.1, § 5, гл. 2] получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

Из равенств (1.56) следует, что уравнения (1.21), (1.22) для преобразований $g_1, \dots, g_M$ обращаются в тождества в Q. Подставляя их в равенство (1.20), записанное для преобразований $g_1, \dots, g_M$, получим для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$

$$A_0 A_i u = A_i A_0 u, \quad A_0 A_i^* u = A_i^* A_0 u, \quad i = 1, \dots, M. \tag{1.58}$$

По условию леммы мы имеем $g_i(x) \equiv g_i^{-1}(x)$ для всех $x \in Q$, $i = M+1, \ldots, N$. Принимая это во внимание, из леммы 1.1 и равенств (1.57) получим

$$A_i = A_i^*, \quad i = M+1, \ldots, N. \tag{1.59}$$

Значит, для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ имеют место равенства

$$A_0 A_i u = A_0 A_i^* u, \quad A_i A_0 u = A_i^* A_0 u, \quad i = M+1, \ldots, N. \tag{1.60}$$

Учитывая равенства (1.58) и (1.60), из нормальности оператора A для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ вытекает

$$(A_1 + \ldots + A_N)(A_1^* + \ldots + A_N^*)u = (A_1^* + \ldots + A_N^*)(A_1 + \ldots + A_N)u,$$

т. е.

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} (A_i A_j^* u + A_j A_i^* u) + \sum_{i=1}^{N} A_i A_i^* u = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} (A_i^* A_j u + A_j^* A_i u) + \sum_{i=1}^{N} A_i^* A_i u. \tag{1.61}$$

Из свойств (1.56) и (1.57) следует, что $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда в силу леммы 1.1 для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ получим

$$A_i A_i^* u = A_i^* A_i u = a_i^2 u, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.62}$$

В силу равенств (1.59) для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ имеем

$$A_i A_j^* u + A_j A_i^* u = A_i^* A_j u + A_j^* A_i u = A_i A_j u + A_j A_i u, \quad i = M+1, \ldots, N. \tag{1.63}$$

С учетом (1.62) и (1.63) для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ запишем равенство (1.61) в виде

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M}(A_iA_j^*u + A_jA_i^*u) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=M+1}^{N}(A_iA_ju + A_jA_i^*u) =$$
$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M}(A_i^*A_ju + A_j^*A_iu) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=M+1}^{N}(A_i^*A_ju + A_jA_iu).$$

Поскольку $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$, с помощью леммы 1.1 для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$ и почти всех $x \in Q$ получим

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M} a_ia_j\big(u(g_j^{-1}g_i(x)) + u(g_i^{-1}g_j(x))\big) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=M+1}^{N} a_ia_j\big(u(g_jg_i(x)) + u(g_i^{-1}g_j(x))\big) =$$
$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{M} a_ia_j\big(u(g_jg_i^{-1}(x)) + u(g_ig_j^{-1}(x))\big) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=M+1}^{N} a_ia_j\big(u(g_jg_i^{-1}(x)) + u(g_ig_j(x))\big). \quad (1.64)$$

Так же, как в доказательстве леммы 1.5, в силу условия 1.3^M и вложения $\dot{C}^\infty(Q) \subset \mathcal{D}(AA^*)$, применяя предложение 1.5 к равенству (1.64), получим, что для всех $i, j = 1, \dots, M$ верно либо (1.46), либо (1.47). Поэтому так же, как в доказательстве леммы 1.5 для всех $x \in Q$ получим

$$g_ig_j(x) = g_jg_i(x), \quad i, j = 1, \dots, M. \quad (1.65)$$

Таким же образом, применяя предложение 1.5 к равенству (1.64), получим, что для всех $i = 1, \dots, M$, $j = M+1, \dots, N$ и $x \in Q$ верна по крайней мере одна из систем уравнений:

$$\begin{cases} g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \\ g_i^{-1} g_j(x) = g_j g_i^{-1}(x), \end{cases} \qquad (1.66) \qquad \begin{cases} g_i g_j(x) = g_i^{-1} g_j(x), \\ g_j g_i(x) = g_j g_i^{-1}(x). \end{cases} \qquad (1.67)$$

Из системы (1.67) следует, что $g_j g_i(x) = g_j g_i^{-1}(x)$, откуда $g_i(x) = g_i^{-1}(x)$, т. е. $x \in \widetilde{G}^2_{g_i}$. С другой стороны, $1 \leqslant i \leqslant M$, следовательно, преобразование g_i имеет вид (1.56). В пункте 7 доказательства леммы 1.4 было доказано, что для такого g_i множество $\widetilde{G}^2_{g_i}$ принадлежит гиперплоскости размерности $r \leqslant n-2$, а значит, $\widetilde{G}^2_{g_i}$ — множество нулевой меры в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, почти всюду в Q верна система (1.66). Поскольку преобразования $g_1, \ldots, g_N$ непрерывны, для любого $x \in Q$ получим

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad i = 1, \ldots, M, \quad j = M+1, \ldots, N. \qquad (1.68)$$

Равенства (1.65) и (1.68) завершают доказательство. □

Пример 1.8. Рассмотрим пример, показывающий, что условие 1.3^M существенно в лемме 1.10. При $N = 3$, $n = 3$ рассмотрим оператор $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$. Положим $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, тогда условие 1.3^M не выполняется. Возьмем следующие ортогональные преобразования:

$$g_1(x) = K_1 x, \quad g_2(x) = K_2 x, \quad g_3(x) = K_3 x,$$

где

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x \in Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$. Тогда $g_1(Q) = g_2(Q) = g_3(Q) = Q$

и легко проверить, что

$$g_2^2(x) = x, \quad g_3^2(x) = x, \quad g_2g_3(x) = g_3g_2(x)$$

для любого $x \in Q$ и

$$g_1^2(x) \neq x, \quad g_1g_2(x) \neq g_2g_1(x), \quad g_1g_3(x) \neq g_3g_1(x)$$

для любого $x \in Q \setminus \{x : x_1 = 0, x_3 = 0\}$.

В терминах § 1.1 получим, что $G^2_{g_1} = Q \setminus \{x : x_1 = 0, x_3 = 0\} \neq \varnothing$ и $G^2_{g_2} = G^2_{g_3} = \varnothing$. Коэффициенты $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ удовлетворяют условию 1.1^M. Также легко убедиться в том, что выполнено условие 1.2 (поскольку матрицы ортогональны, обратные преобразования получаются переходом к транспонированным матрицам).

Докажем, что оператор A нормальный. Очевидно, что для любого $x \in Q$

$$g_1g_2^{-1}(x) = g_1^{-1}g_3(x), \quad g_2g_1^{-1}(x) = g_3^{-1}g_1(x), \tag{1.69}$$

$$g_1g_3^{-1}(x) = g_2^{-1}g_1(x), \quad g_3g_1^{-1}(x) = g_1^{-1}g_2(x). \tag{1.70}$$

Поскольку g_1, g_2, g_3 — ортогональные преобразования, то так же, как в доказательстве леммы 1.5, доказывается, что для g_1, g_2, g_3 выполнены равенства (1.43), (1.44). Следовательно, нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора $A_1 + A_2 + A_3$ при $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Легко проверить, что оператор $A_1 + A_2 + A_3$ является нормальным в силу равенств $g_2g_3(x) = g_3g_2(x)$, (1.69) и (1.70), $x \in Q$.

Таким образом, выполнены все условия леммы 1.10, кроме условия 1.3^M. Оператор A является нормальным, однако преобразование g_1 не коммутирует с g_2 и g_3. Следовательно, условие 1.3^M существенно в лемме 1.10.

Пример 1.9. Преобразования g_1, g_2, g_3 в примере 1.8 являются конечными суперпозициями отражений относительно координатных плоскостей и поворотов на угол $\pi/2$ вокруг координатных осей. Приведем пример преобразований, являющихся конечными суперпозициями только поворотов на угол $\pi/2$, и имеющих те же свойства, что и преобразования g_1, g_2, g_3 из примера 1.8:

$$g_1(x) = K_1 x, \quad g_2(x) = K_2 x, \quad g_3(x) = K_3 x,$$

где

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1.11. *Пусть $G^2_{g_i} \neq \varnothing$, $g_i(Q) = Q$ при $i = 1, \ldots, M$, $G^2_{g_i} = \varnothing$ при $i = M+1, \ldots, N$. Тогда $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \ldots, N$, и если преобразования $g_1, \ldots, g_N$ таковы, что*

1. *$g_i(x) = K_i x + b_i$, $x \in Q$, где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, M$,*
2. *$|J_{g_i}(x)| = 1$, $x \in Q$, $i = M+1, \ldots, N$,*
3. *$g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$, $x \in Q$, $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, N$,*

то оператор A нормальный.

Доказательство. Так как $G^2_{g_i} = \varnothing$, по лемме 1.2 получим $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \ldots, N$.

Поскольку преобразования $g_1, \ldots, g_N$ имеют вид (1.56), (1.57), так же, как в доказательстве леммы 1.10, получим $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A) = \{u \in$

$W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1.10, получим, что оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда равенство (1.64) верно для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. Из условия (3) леммы следует, что равенство (1.64) верно для любого $u \in \mathcal{D}(AA^*)$. $\square$

Доказательство теоремы 1.3 следует из лемм 1.9, 1.10 и 1.11.

Глава 2

Смешанные задачи для линейных параболических функционально-дифференциальных уравнений

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим линейное параболическое функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x),t) + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T \tag{2.1}$$

с краевыми условиями первого либо второго рода

$$u\Big|_{\Gamma_T} = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\bigg|_{\Gamma_T} = 0 \tag{2.3}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q. \tag{2.4}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\partial Q \in C^\infty$, $\Omega_T = Q \times [0, T]$, $\Gamma_T = \partial Q \times [0, T]$, $\widetilde{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ_T, $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$, $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$, а $g_1, \ldots, g_N$ — некоторые преобразования переменных. Будем также использовать обозначение $Q_t = Q \times \{t\}$, так что $Q_0 = Q$.

Всюду в этой главе будем предполагать, что неограниченный линейный оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$, действующий по формуле

$$(Au)(x) = \Delta u(x) + \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x)),$$

является нормальным. (Здесь оператор $Bu = u\big|_{\partial Q}$ или $Bu = (\partial u / \partial \nu)\big|_{\partial Q}$ задает краевые условия первого или второго рода.)

Условие 2.1. *Преобразования $g_1, \ldots, g_N$ взаимно-однозначны, принадлежат классу гладкости C^3, имеет место $g_i(Q) = Q$, $|J_{g_i}(x)| \neq 0$ $(x \in \overline{Q})$, $i = 1, \ldots, N$, а также*

$$G_{g_i}^2 \neq \varnothing, \quad i = 1, \ldots, M,$$
$$G_{g_i}^2 = \varnothing, \quad i = M+1, \ldots, N.$$

(См. определения $|J_{g_i}(x)|$ и $G_{g_i}^m$ в § 1.1.)

Условие 2.2. *Преобразования $g_1, \ldots, g_N$ при всех $x \in Q$ удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} &g_i(x) = K_i x + b_i, && i = 1, \ldots, M, \\ &|J_{g_i}(x)| = 1, && i = M+1, \ldots, N, \\ &g_i g_j(x) = g_j g_i(x), && i = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, N, \end{aligned}$$

где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.

Применяя теорему 1.3 из § 1.2, получим следующие результаты.

Теорема 2.1.

1. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.2. *Тогда оператор* A *нормальный.*

2. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 1.1^M, 1.2, 1.3^M. *Тогда условие* 2.2 *эквивалентно нормальности оператора* A.

Далее в этой главе будем считать, что условия 2.1 и 2.2 выполнены, следовательно, оператор A является нормальным.

Введем анизотропное пространство Соболева $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ функций, принадлежащих $L_2(\Omega_T)$ вместе со своими обобщенными производными первого порядка по переменным $x_1, \dots, x_N$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \int\limits_{\Omega_T} (\nabla u \overline{\nabla v} + u\overline{v})\, dxdt = \int\limits_0^T (u, v)_{W_2^1(Q_t)} dt.$$

Введем также следующие подпространства:

$$W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T) = \{u \in W_2^{1,0}(\Omega_T) : u\big|_{\Gamma_T} = 0\},$$
$$\widehat{W}_2^1(\Omega_T) = \{u \in W_2^1(\Omega_T) : u\big|_{Q_T} = 0\},$$
$$\widehat{W}_{2,D}^1(\Omega_T) = \{u \in W_2^1(\Omega_T) : u\big|_{\Gamma_T} = 0,\ u\big|_{Q_T} = 0\}.$$

Определение 2.1. Назовем функцию $u \in W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T)$ ($u \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$) *обобщенным решением* задачи (2.1), (2.2), (2.4) (задачи (2.1), (2.3), (2.4)), если для любой функции $v \in \widehat{W}_{2,D}^1(\Omega_T)$ ($v \in \widehat{W}_2^1(\Omega_T)$) выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega_T} \left(\nabla u \overline{\nabla v} - u\overline{v}_t - \sum_{i=1}^N a_i u(g_i(x), t)\overline{v} \right) dxdt = \int\limits_{Q_0} \varphi\overline{v}\big|_{t=0} dx + \int\limits_{\Omega_T} f\overline{v}\, dxdt. \tag{2.5}$$

2.2 Спектральные свойства эллиптического функционально-дифференциального оператора

Через $\mathring{W}_2^1(Q)$ обозначим замыкание в $W_2^1(Q)$ множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$.

Определение 2.2. Не равная тождественно нулю функция $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ ($u \in W_2^1(Q)$) называется *обобщенной собственной функцией* оператора A с краевыми условиями $Bu = u\big|_{\partial Q} = 0$ ($Bu = (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0$), соответствующей *собственному значению* $\lambda \in \mathbb{C}$, если для любой функции $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$ ($v \in W_2^1(Q)$) выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q \left(\nabla u \overline{\nabla v} - \sum_{i=1}^N a_i u(g_i(x)) \overline{v} \right) dx = -\lambda \int\limits_Q u \overline{v}\, dx. \tag{2.6}$$

Далее под *собственными функциями* будем понимать обобщенные собственные функции.

Рассмотрим неограниченный линейный оператор $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(A_0) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$, действующий по формуле $A_0 u = \Delta u$, а также ограниченный линейный оператор $A_g : L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$(A_g u)(x) = \sum_{i=1}^N a_i u(g_i(x)).$$

Тогда $A = A_0 + A_g$. Через $\|.\|_2$ обозначим норму в пространстве линейных ограниченных операторов в $L_2(Q)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Оператор A имеет компактную резольвенту и дискретный* *спектр, удовлетворяющий условиям* $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|A_g\|_2,$ $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|A_g\|_2\}$ *и* $\operatorname{Re}\lambda_k \to -\infty$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Оператор A_0 самосопряженный. Поэтому, как известно [11, гл. V, § 3], спектр $\sigma(A_0)$ вещественный и

$$\|(A_0 - \lambda I)^{-1}\|_2 \leqslant |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{2.7}$$

Так как оператор A_g ограничен, получим

$$\|(A_0 - \lambda I)^{-1} A_g\|_2 \leqslant \|A_g\|_2 |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{2.8}$$

Очевидно, для $\lambda \notin \sigma(A_0)$ можно записать

$$A - \lambda I = (A_0 - \lambda I)(I + (A_0 - \lambda I)^{-1} A_g). \tag{2.9}$$

При $|\operatorname{Im}\lambda| > \|A_g\|_2$ из (2.8) получим $\|(A_0 - \lambda I)^{-1} A_g\|_2 \leqslant c_1$, где $c_1 < 1$. Отсюда вытекает оценка $\|I + (A_0 - \lambda I)^{-1} A_g\|_2 \geqslant c_2 > 0$, следовательно, существует ограниченный оператор $(I + (A_0 - \lambda I)^{-1} A_g)^{-1}$. Поэтому из (2.7), (2.9) следует, что $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|A_g\|_2\}$.

Интегрируя по частям, для $u \in \mathcal{D}(A)$ мы имеем

$$\operatorname{Re}(Au, u)_{L_2(Q)} = -\int\limits_Q |\nabla u|^2\, dx + \operatorname{Re}\int\limits_Q A_g u\, \overline{u}\, dx \leqslant \|A_g\|_2 \|u\|^2_{L_2(Q)}.$$

Следовательно, $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|A_g\|_2\}$.

Из теоремы Банаха об обратном операторе и компактности вложения $W_2^2(Q)$ в $L_2(Q)$ следует, что резольвента $(A - \lambda I)^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ компактна при $\lambda \notin \sigma(A)$. По теореме об операторе с компактной резольвентой [11, гл. III, § 6, теорема 6.29] оператор A имеет дискретный спектр. В силу того, что оператор A_g ограничен, имеет место $\operatorname{Re}\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$ (см. [11, гл. V, § 4]). $\square$

Из теоремы об операторе с компактной резольвентой [11, теорема 6.29, § 6, гл. III] и теоремы об ограниченном нормальном операторе [16, гл. 12, теорема 12.29] вытекает следующее утверждение (см. лемму 3.8 в [35]).

Лемма 2.2. *Пусть $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ — линейный оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H, и пусть его область определения $\mathcal{D}(A)$ плотна в H. Предположим, что оператор A имеет компактную резольвенту $R(\lambda, A) : H \to H$.*

В таком случае в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций оператора A, тогда и только тогда, когда оператор A — нормальный.

Из теоремы 2.1 и лемм 2.1, 2.2 вытекает следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия 2.1 и 2.2. Тогда в $L_2(Q)$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций оператора A.*

2.3 Формальное решение методом Фурье

Обозначим через $\{e_k\}$ ортонормированный базис в $L_2(Q)$, состоящий из собственных функций оператора A. Будем искать решение задач (2.1), (2.2), (2.4) и (2.1), (2.3), (2.4) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k(x). \tag{2.10}$$

Разложим правую часть уравнения (2.1) и начальную функцию (2.4) в ряды Фурье:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) e_k(x), \quad f_k(t) = \int\limits_{\Omega_T} f(x,t)\overline{e_k(x)}\,dx \tag{2.11}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k(x), \quad \varphi_k = \int\limits_{Q} \varphi(x)\overline{e_k(x)}\,dx. \tag{2.12}$$

Подставим ряды (2.10), (2.11) и (2.12) в уравнение (2.1) и начальное условие (2.4), учитывая, что $Ae_k = \lambda_k e_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t) e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t) e_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) e_k(x), \tag{2.13}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k(x). \tag{2.14}$$

Умножая скалярно уравнения (2.13), (2.14) на базисные функции, при каждом $k = 1, 2, \ldots$ получим задачу Коши

$$u_k'(t) - \lambda_k u_k(t) = f_k(t), \tag{2.15}$$

$$u_k(0) = \varphi_k. \tag{2.16}$$

Решая задачу (2.15), (2.16), получим

$$u_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int\limits_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau. \tag{2.17}$$

Таким образом, решение задачи (2.1), (2.2), (2.4) (задачи (2.1), (2.3), (2.4)) записывается в виде ряда (2.10), где e_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — собственные функции оператора A с краевым условием $Bu = u\big|_{\partial Q} = 0$ $(Bu = (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0)$, а коэффициенты $u_k(t)$, $f_k(t)$ и φ_k определяются по формулам (2.17), (2.11) и (2.12) соответственно.

2.4 Существование обобщенных решений

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.2. *Тогда для любых* $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$ *существует обобщенное решение* $u \in W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T)$ ($u \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$) *задачи* (2.1), (2.2), (2.4) (*задачи* (2.1), (2.3), (2.4)), *которое представляется в виде ряда*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k(x),$$

где

$$u_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int\limits_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau,$$

$$f_k(t) = \int\limits_{\Omega_T} f(x,t)\overline{e_k(x)}\, dx, \quad \varphi_k = \int\limits_Q \varphi(x)\overline{e_k(x)}\, dx,$$

а e_k, λ_k — *собственные функции и собственные значения оператора* A *с краевыми условиями* $Bu = u\big|_{\partial Q} = 0$ ($Bu = (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0$).

Ряд сходится в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{L_2(Q)} + \|f\|_{L_2(\Omega_T)}\right). \tag{2.18}$$

Доказательство. Из теоремы 2.2 следует, что при выполнении условий 2.1 и 2.2 существует ортонормированный базис в $L_2(Q)$, состоящий из собственных функций оператора A. Применим метод Фурье.

1. При фиксированном k положим $f(x,t) = f_k(t)e_k(x)$, $\varphi(x) = \varphi_k e_k(x)$. Докажем, что $u(x,t) = u_k(t)e_k(x)$ является обобщенным решением задачи (2.1), (2.2), (2.4) (задачи (2.1), (2.3), (2.4)).

В силу определений u_k и e_k имеем $u \in W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T)$ ($u \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$). Действительно,

$$\|u\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \|e_k\|^2_{W_2^1(Q)} \int\limits_0^T |u_k(t)|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\|e_k\|^2_{W_2^1(Q)} \int\limits_0^T \left(|\varphi_k|^2 e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t} + \int\limits_0^t e^{2\operatorname{Re}\lambda_k (t-\tau)} d\tau \int\limits_0^t |f_k(\tau)|^2 d\tau \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \|e_k\|^2_{W_2^1(Q)} \left(\|\varphi\|^2_{L_2(Q)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega_T)} \right),$$

а по определению e_k в случае $Bu = u\big|_{\partial Q} = 0$ дополнительно получаем $u \in W^{1,0}_{2,D}(\Omega_T)$.

Подставляя $u(x,t)$ в интегральное тождество (2.5) при $v \in \widehat{W}^1_{2,D}(\Omega_T)$ ($v \in \widehat{W}^1_2(\Omega_T)$) и учитывая интегральное тождество (2.6) и равенства $u_k'(t) = \lambda_k u_k(t) + f_k(t)$, $u_k(0) = \varphi_k$, $f(x,t) = f_k(t) e_k(x)$ и $\varphi(x) = \varphi_k e_k(x)$, получим:

$$\int\limits_{\Omega_T} \left(u_k(t) \nabla e_k(x) \overline{\nabla v} - u_k(t) e_k(x) \overline{v}_t - u_k(t) \sum_{i=1}^N a_i e_k(g_i(x)) \overline{v} \right) dxdt =$$

$$= \int\limits_0^T u_k(t)\, dt \int\limits_{Q_t} \left(-\lambda_k e_k(x) \overline{v} - e_k(x) \overline{v}_t \right) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_T} \left(-\lambda_k u_k(t) e_k(x) \overline{v} + u_k'(t) e_k(x) \overline{v} \right) dxdt + \int\limits_{Q_0} u_k(0) e_k(x) \overline{v}\big|_{t=0} dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_T} f \overline{v}\, dxdt + \int\limits_{Q_0} \varphi \overline{v}\big|_{t=0}\, dx.$$

Таким образом, $u(x,t) = u_k(t) e_k(x)$ является обобщенным решением задачи (2.1), (2.2), (2.4) (задачи (2.1), (2.3), (2.4)).

2. Пусть $f(x,t) = \sum\limits_{k=1}^L f_k(t) e_k(x)$, $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^L \varphi_k e_k(x)$. Тогда по принципу суперпозиции получим, что $S_L(x,t) = \sum\limits_{k=1}^L u_k(t) e_k(x)$ является обобщенным

решением задачи (2.1), (2.2), (2.4) (задачи (2.1), (2.3), (2.4)).

3. Пусть $f(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t)e_k(x)$, $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k(x)$. Докажем, что ряд $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t)e_k(x)$ сходится в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$. В силу полноты пространства $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ достаточно доказать фундаментальность последовательности $\{S_L\}$. Учитывая ортонормированность в $L_2(Q)$ системы функций $\{e_k\}$, имеем:

$$\|S_{L_2} - S_{L_1}\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \int\limits_0^T dt \int\limits_{Q_t} \left(|S_{L_2} - S_{L_1}|^2 + |\nabla(S_{L_2} - S_{L_1})|^2\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=L_1+1}^{L_2} \int\limits_0^T |u_k(t)|^2\, dt \int\limits_{Q_t} \left(|e_k(x)|^2 + |\nabla e_k(x)|^2\right) dx =$$

$$= 2 \sum_{k=L_1+1}^{L_2} \int\limits_0^T |u_k(t)|^2\, dt \left(1 + \int\limits_{Q_t} |\nabla e_k(x)|^2 dx\right).$$

Используя интегральное тождество (2.6) из определения собственных функций e_k, ортонормированность в $L_2(Q)$ системы функций $\{e_k\}$, неравенство Коши—Буняковского и свойства $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$ ($x \in Q$) и $g_i(Q) = Q$ преобразований $g_1, \ldots, g_N$, получим

$$\int\limits_Q |\nabla e_k(x)|^2\, dx = \int\limits_Q \left(\sum_{i=1}^{N} a_i e_k(g_i(x))\overline{e_k(x)} - \lambda_k |e_k(x)|^2\right) dx =$$

$$= -\lambda_k + \sum_{i=1}^{N} a_i \int\limits_Q e_k(g_i(x))\overline{e_k(x)} dx =$$

$$= \left| -\lambda_k + \sum_{i=1}^{N} a_i \int\limits_Q e_k(g_i(x))\overline{e_k(x)} dx \right| \leqslant |\lambda_k| + \sum_{i=1}^{N} |a_i| \left| \int\limits_Q e_k(g_i(x))\overline{e_k(x)} dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_k| + \sum_{i=1}^{N} |a_i| \left(\int\limits_Q |e_k(g_i(x))|^2 \, dx \right)^{1/2} \overset{y^i = g_i(x)}{=}$$

$$\overset{y^i = g_i(x)}{=} |\lambda_k| + \sum_{i=1}^{N} |a_i| \left(\int\limits_Q |e_k(y^i)|^2 \, dy^i \right)^{1/2} = |\lambda_k| + \sum_{i=1}^{N} |a_i|. \quad (2.19)$$

Используя формулу (2.17) и неравенство Коши—Буняковского, получим

$$|u_k(t)|^2 \leqslant 2|\varphi_k|^2 e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t} + 2 \left| \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2|\varphi_k|^2 e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t} - \frac{1 - e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t}}{\operatorname{Re}\lambda_k} \int\limits_0^t |f_k(\tau)|^2 d\tau.$$

В силу леммы 2.1 при $k > k_0$, где k_0 — достаточно большое число, имеет место $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$. Поэтому при $k > k_0$ получим

$$|u_k(t)|^2 \leqslant 2|\varphi_k|^2 e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t} - \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_k} \int\limits_0^T |f_k(\tau)|^2 d\tau,$$

откуда при $k > k_0$ следует

$$\int\limits_0^T |u_k(t)|^2 \, dt \leqslant \frac{C_2}{-\operatorname{Re}\lambda_k} \left(|\varphi_k|^2 + \int\limits_0^T |f_k(t)|^2 \, dt \right). \quad (2.20)$$

Используя оценки (2.19) и (2.20), при $L_1 > k_0$ получим

$$\|S_{L_2} - S_{L_1}\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant 2C_2 \sum_{k=L_1+1}^{L_2} \frac{1}{-\operatorname{Re}\lambda_k} \left(1 + |\lambda_k| + \sum_{i=1}^{N} |a_i| \right) \left(|\varphi_k|^2 + \int\limits_0^T |f_k(t)|^2 \, dt \right).$$

В силу леммы 2.1 имеем

$$1 \leqslant \frac{1}{-\operatorname{Re}\lambda_k}\left(1+|\lambda_k|+\sum_{i=1}^{N}|a_i|\right) \leqslant C_3 \quad \text{при всех} \quad k>k_0,$$

$$\frac{1}{-\operatorname{Re}\lambda_k}\left(1+|\lambda_k|+\sum_{i=1}^{N}|a_i|\right) \to 1 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{L_1,L_2\to\infty}\|S_{L_2}-S_{L_1}\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} \leqslant 2C_2C_3\lim_{L_1,L_2\to\infty}\sum_{k=L_1+1}^{L_2}\left(|\varphi_k|^2+\int\limits_0^T|f_k(t)|^2\,dt\right)=0$$

в силу ограниченности норм $\|\varphi\|_{L_2(Q)}$, $\|f\|_{L_2(\Omega_T)}$ и равенств Парсеваля

$$\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|^2, \qquad \|f\|^2_{L_2(\Omega_T)}=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T|f_k(t)|^2\,dt. \tag{2.21}$$

Таким образом, ряд $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(t)e_k(x)$ сходится в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$. Если рассматривается задача (2.1), (2.2), (2.4), то дополнительно получим $u\in W^{1,0}_{2,D}(\Omega_T)$. Переходя к пределу при $L\to\infty$ в тождестве

$$\int\limits_{\Omega_T}\left(\nabla S_L(x,t)\overline{\nabla v}-S_L(x,t)\overline{v}_t-\sum_{i=1}^{N}a_iS_L(g_i(x),t)\overline{v}\right)dxdt=$$
$$=\int\limits_{Q_0}\sum_{k=1}^{L}\varphi_ke_k(x)\overline{v}\Big|_{t=0}dx+\int\limits_{\Omega_T}\sum_{k=1}^{L}f_k(t)e_k(x)\overline{v}\,dxdt$$

при любом $v\in\widehat{W}^1_{2,D}(\Omega_T)$ $(v\in\widehat{W}^1_2(\Omega_T))$, получим, что $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (2.1), (2.2), (2.4) (задачи (2.1), (2.3), (2.4)).

Поскольку существует лишь конечное число собственных значений с неотрицательной вещественной частью, то справедлива оценка

$$\|S_L\|^2_{W_2^1(\Omega_T)} \leqslant C_4\sum_{k=1}^{L}\left(|\varphi_k|^2+\int\limits_0^T|f_k(t)|^2\,dt\right).$$

Переходя к пределу при $L \to \infty$, в силу равенств Парсеваля (2.21) получим оценку (2.18). $\square$

2.5 Единственность обобщенных решений

Теорема 2.4. *Если выполнено условие* 2.1, *то задача* (2.1), (2.2), (2.4) (*задача* (2.1), (2.3), (2.4)) *имеет не более одного обобщенного решения.*

Доказательство. Предположим, что существуют два обобщенных решения $u_1, u_2 \in W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T)$ $(u_1, u_2 \in W_2^{1,0}(\Omega_T))$ задачи (2.1), (2.2), (2.4) (задачи (2.1), (2.3), (2.4)). Тогда функция $u = u_1 - u_2$ является решением задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x), t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{2.22}$$

$$Bu = 0, \tag{2.23}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in Q, \tag{2.24}$$

где $Bu = u\big|_{\Gamma_T}$ $\Big(Bu = (\partial u/\partial\widetilde{\nu})\big|_{\Gamma_T}\Big)$. По определению обобщенного решения (определение 2.1) для любой функции $v \in \widehat{W}_{2,D}^{1}(\Omega_T)$ $(v \in \widehat{W}_2^1(\Omega_T))$ будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_T} \left(\nabla u \overline{\nabla v} - u\overline{v}_t - \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x), t)\overline{v} \right) dxdt = 0. \tag{2.25}$$

Положим

$$v(x,t) = \int\limits_t^T u(x,\tau)\, d\tau.$$

Очевидно, что $v \in \widehat{W}_{2,D}^{1}(\Omega_T)$ $(v \in \widehat{W}_2^1(\Omega_T))$ и

$$v_t(x,t) = -u(x,t), \qquad \nabla v(x,t) = \int\limits_t^T \nabla u(x,\tau)\, d\tau.$$

Тогда из (2.25) получим

$$\int\limits_{\Omega_T} |u|^2 dxdt + \int\limits_Q dx \int\limits_0^T \nabla u(x,t)\, dt \int\limits_t^T \overline{\nabla u(x,\tau)}\, d\tau -$$
$$- \sum_{i=1}^N a_i \int\limits_Q dx \int\limits_0^T u(g_i(x),t)\, dt \int\limits_t^T \overline{u(x,\tau)}\, d\tau = 0. \quad (2.26)$$

Обозначим через I второе слагаемое в левой части равенства (2.26). Меняя порядок интегрирования по переменным t и τ, получим

$$I = \int\limits_Q dx \int\limits_0^T \nabla u(x,\tau)\, d\tau \int\limits_0^\tau \overline{\nabla u(x,t)}\, dt = \int\limits_Q dx \int\limits_0^T \nabla u(x,\tau)\, d\tau \int\limits_0^T \overline{\nabla u(x,t)}\, dt -$$
$$- \int\limits_Q dx \int\limits_0^T \nabla u(x,\tau)\, d\tau \int\limits_\tau^T \overline{\nabla u(x,t)}\, dt = \int\limits_Q dx \int\limits_0^T \nabla u(x,\tau)\, d\tau \int\limits_0^T \overline{\nabla u(x,t)}\, dt - I,$$

откуда

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_Q \left| \int\limits_0^T \nabla u(x,\tau)\, d\tau \right|^2 dx \geqslant 0. \quad (2.27)$$

Оценим модуль третьего слагаемого в равенстве (2.25). Используя неравенство Коши—Буняковского и свойства $\left|J_{g_i^{-1}}(x)\right| \leqslant C$ $(x \in Q)$ и $g_i(Q) = Q$ преобразований $g_1, \ldots, g_N$, получим

$$\left| \sum_{i=1}^N a_i \int\limits_{\Omega_T} u(g_i(x),t) \overline{v(x,t)}\, dxdt \right| \leqslant \sum_{i=1}^N |a_i| \left| \int\limits_{\Omega_T} u(g_i(x),t) \overline{v(x,t)}\, dxdt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|v\|_{L_2(\Omega_T)} \sum_{i=1}^N |a_i| \left(\int\limits_0^T \int\limits_Q |u(g_i(x),t)|^2 dxdt \right)^{1/2} \overset{y^i = g_i(x)}{=}$$

$$\overset{y^i=g_i(x)}{=} \quad \|v\|_{L_2(\Omega_T)} \sum_{i=1}^{N} |a_i| \left(\int_0^T \!\! \int_Q |u(y^i,t)|^2 \left| J_{g_i^{-1}}(x) \right| dy^i dt \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{C} \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i| \right) \|u\|_{L_2(\Omega_T)} \|v\|_{L_2(\Omega_T)}. \quad (2.28)$$

Оценим норму $\|v\|_{L_2(\Omega_T)}$. Используя неравенство Коши—Буняковского, получим:

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} \left| \int_t^T u(x,\tau)\, d\tau \right|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega_T} (T-t) \left(\int_t^T |u(x,\tau)|^2 d\tau \right) dxdt \leqslant \frac{T^2}{2} \|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \quad (2.29)$$

Используя оценки (2.27)–(2.29), из равенства (2.26) получим

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)} - T\sqrt{\frac{C}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i| \right) \|u\|^2_{L_2(\Omega_T)} \leqslant 0,$$

откуда следует, что $\|u\|_{L_2(\Omega_T)} = 0$ при

$$T < \sqrt{\frac{2}{C}} \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i| \right)^{-1}. \quad (2.30)$$

Таким образом, если T достаточно мало, так что условие (2.30) выполняется, то задача (2.22), (2.23), (2.24) имеет только тривиальное обобщенное решение, следовательно, задача (2.1), (2.2), (2.4) (задача (2.1), (2.3), (2.4)) имеет не более одного обобщенного решения в области Ω_T.

В противном случае выберем такое $T_0 < T$, чтобы для T_0 выполнялось условие (2.30), и рассмотрим задачу (2.22), (2.23), (2.24) в области $Q \times (0, T_0)$. Такая задача будет иметь только тривиальное обобщенное решение $w_0 \equiv 0$. Затем рассмотрим задачу (2.22), (2.23), (2.24) в области

$Q \times (T_0, 2T_0)$ с начальным условием $w_1(x, T_0) = w_0(x, T_0) = 0$. Эта задача также будет иметь только тривиальное обобщенное решение $w_1 \equiv 0$. Рассматривая аналогичные задачи в областях $Q \times (2T_0, 3T_0)$, $Q \times (3T_0, 4T_0), \ldots,$ за конечное число шагов исчерпаем интервал $(0, T)$. Таким образом, при любом T задача (2.22), (2.23), (2.24) в области $\Omega_T = Q \times (0, T)$ имеет только тривиальное обобщенное решение, следовательно, задача (2.1), (2.2), (2.4) (задача (2.1), (2.3), (2.4)) имеет не более одного обобщенного решения при любом T. $\square$

Глава 3

Бифуркация периодических решений квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим квазилинейное параболическое функционально-дифференциальное уравнение с конечным числом преобразований переменных в младших членах:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = D\Delta u(x,t) + K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos(u(g_i(x),t))\Big). \qquad (3.1)$$

Здесь $x \in Q$, $t \in \mathbb{R}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$; $D > 0$, $K, \gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ — постоянные коэффициенты, не равные нулю; $g_i : V \to g_i(V)$ — взаимно-однозначные преобразования, $V \in \mathbb{R}^n$,

$\overline{Q} \subset V$. Всюду далее будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 3.1. $g_i(Q) \cap Q \neq \varnothing$, $g_i(x) \not\equiv x$ $(x \in Q)$, $i = 1, \dots, N$.

Уравнение (3.1) рассматривается с краевыми условиями Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\bigg|_{\partial Q \times \mathbb{R}} = 0, \tag{3.2}$$

где $\widetilde{\nu} = (\nu, 0)$, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке x.

В случае, если $g_i(Q) \setminus Q \neq \varnothing$ при некоторых i, зададим значения неизвестной функции $u(x,t)$ вне области Q:

$$u(g_i(x), t) = 0, \quad x \in \{x \in Q : g_i(x) \notin Q\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{3.3}$$

В соответствии с этим введем линейные операторы G_i, $i = 1, \dots, N$, по формуле

$$(G_i u)(x,t) = \begin{cases} u(g_i(x), t), & x \in \{x \in Q : g_i(x) \in Q\}, \\ 0, & x \in \{x \in Q : g_i(x) \notin Q\}. \end{cases}$$

Также будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 3.2. *Операторы* $G_i : L_p(Q) \to L_p(Q)$, $i = 1, \dots, N$, *ограничены.*

3.2 Линеаризация

В этом разделе изучим некоторые свойства линеаризованного варианта задачи (3.1)–(3.3), которые в дальнейшем будут использоваться для изучения бифуркации периодических решений исходной задачи (3.1)–(3.3).

Решение u задачи (3.1)–(3.3) называется *пространственно-однородным стационарным решением*, если оно не зависит от $x \in Q$ и $t \in \mathbb{R}$.

Из уравнений (3.1) и (3.3) для пространственно-однородного стационарного решения w получим

$$w(x) = K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos w(g_i(x))\Big), \quad x \in Q, \tag{3.4}$$

$$w(g_i(x)) = 0, \quad x \in \{x \in Q : g_i(x) \notin Q\}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{3.5}$$

По определению,

$$w(x) = \mathrm{const}, \quad x \in Q. \tag{3.6}$$

Рассмотрим следующее условие.

Условие 3.3. $\sum\limits_{i\in\mathcal{K}} \gamma_i \neq \sum\limits_{i\in\mathcal{M}} \gamma_i$ *для любых* $\mathcal{K}, \mathcal{M} \subseteq \{1, \ldots, N\}$, *таких что* $\mathcal{K} \neq \mathcal{M}$.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* 3.1 *и* 3.3 *и существует* k, *такое что* $g_k(Q) \setminus Q \neq \varnothing$. *Тогда задача* (3.4)–(3.6) *разрешима тогда и только тогда*, *когда*

$$K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i\Big) = 2\pi m \tag{3.7}$$

для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. *В этом случае решение единственно*, *причем* $w = 2\pi m$.

Доказательство. Пусть в некоторой точке $x^0 \in Q$ имеет место $g_i(x^0) \in Q$, $i \in \mathcal{K}^0 \subseteq \{1, \ldots, N\}$ и $g_i(x^0) \notin Q$, $i \in \overline{\mathcal{K}^0} = \{1, \ldots, N\} \setminus \mathcal{K}^0$. В силу условия 3.1 и того, что по условию леммы $g_k(Q) \setminus Q \neq \varnothing$, можно выбрать точку x^1, такую что $g_i(x^1) \in Q$, $i \in \mathcal{K}^1 \subseteq \{1, \ldots, N\}$ и $g_i(x^1) \notin Q$, $i \in \overline{\mathcal{K}^1}$, причем $\mathcal{K}^0 \neq \mathcal{K}^1$.

Тогда из уравнений (3.4)–(3.6) при $x = x^0$ и $x = x^1$ соответственно получим

$$w = K\Big(1+\sum_{i\in\mathcal{K}^0}\gamma_i\cos w+\sum_{i\in\overline{\mathcal{K}^0}}\gamma_i\Big),\quad w = K\Big(1+\sum_{i\in\mathcal{K}^1}\gamma_i\cos w+\sum_{i\in\overline{\mathcal{K}^1}}\gamma_i\Big). \quad (3.8)$$

Приравнивая правые части этих уравнений, придем к равенству

$$\sum_{i\in\mathcal{K}^0}\gamma_i\cos w+\sum_{i\in\overline{\mathcal{K}^0}}\gamma_i = \sum_{i\in\mathcal{K}^1}\gamma_i\cos w+\sum_{i\in\overline{\mathcal{K}^1}}\gamma_i,$$

откуда, приводя подобные слагаемые и учитывая, что $\overline{\mathcal{K}^1}\setminus\overline{\mathcal{K}^0} = \mathcal{K}^0\setminus\mathcal{K}^1$, получим

$$\Big(\sum_{i\in\mathcal{K}^0\setminus\mathcal{K}^1}\gamma_i-\sum_{i\in\mathcal{K}^1\setminus\mathcal{K}^0}\gamma_i\Big)\cos w = \sum_{i\in\mathcal{K}^0\setminus\mathcal{K}^1}\gamma_i-\sum_{i\in\mathcal{K}^1\setminus\mathcal{K}^0}\gamma_i.$$

В силу условия 3.3 получим, что $\cos w = 1$, $w = 2\pi m$ ($m\in\mathbb{Z}$). Тогда из соотношений (3.8) получим (3.7). □

Замечание 3.1. Пусть условие 3.3 не выполняется, т. е. существуют такие $\mathcal{K}$ и $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}\neq\mathcal{M}$, что $\sum\limits_{i\in\mathcal{K}}\gamma_i = \sum\limits_{i\in\mathcal{M}}\gamma_i$. Без ограничения общности предположим, что $\mathcal{K}\cap\mathcal{M} = \varnothing$. Тогда существуют преобразования $g_1,\ldots,g_N$, такие что задача (3.4)–(3.6) имеет решения, отличные от решений, описанных в лемме 3.1.

Доказательство. Действительно, разобьем область Q на две подобласти Q_1 и Q_2, такие что $\overline{Q_1}\cup\overline{Q_2} = \overline{Q}$ и $Q_1\cap Q_2 = \varnothing$. Пусть

$$g_i(Q_1)\cap Q = \varnothing,\quad g_i(Q_2)\subseteq Q,\quad i\in\mathcal{K};$$
$$g_i(Q_2)\cap Q = \varnothing,\quad g_i(Q_1)\subseteq Q,\quad i\in\mathcal{M};$$
$$g_i(Q)\subseteq Q,\quad i\in\{1,\ldots,N\}\setminus(\mathcal{K}\cup\mathcal{M}).$$

Тогда из уравнений (3.4)–(3.6) при $x^1\in Q_1$ и $x^2\in Q_2$ соответственно получим

$$w = K\Big(1+\sum_{i\in\overline{\mathcal{K}}}\gamma_i\cos w+\sum_{i\in\mathcal{K}}\gamma_i\Big),\qquad w = K\Big(1+\sum_{i\in\overline{\mathcal{M}}}\gamma_i\cos w+\sum_{i\in\mathcal{M}}\gamma_i\Big).$$

Поскольку из равенства $\sum\limits_{i\in\mathcal{K}}\gamma_i = \sum\limits_{i\in\mathcal{M}}\gamma_i = b$ следует $\sum\limits_{i\in\overline{\mathcal{K}}}\gamma_i = \sum\limits_{i\in\overline{\mathcal{M}}}\gamma_i = a$, то каждое из полученных уравнений равносильно уравнению

$$w = K\left(1 + a\cos w + b\right),$$

которое, очевидно, имеет не менее одного решения при любых K, a, b. $\square$

Будем считать K бифуркационным параметром. Пусть w — решение задачи (3.4)–(3.6) для некоторого значения параметра K. Положим $u(x,t) = w + v(x,t)$. Тогда

$$v_t = \Lambda v + \mathcal{N}(v), \tag{3.9}$$

где

$$\Lambda v = D\Delta v - v - K\sum_{i=1}^{N}\gamma_i v_{g_i}\sin w_{g_i}, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{N}(v) = K\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\Big(\cos(w_{g_i} + v_{g_i}) - \cos w_{g_i} + v_{g_i}\sin w_{g_i}\Big). \tag{3.11}$$

Здесь $v_{g_i} = v(g_i(x))$, $w_{g_i} = w(g_i(x))$.

Будем рассматривать оператор $\Lambda : \mathcal{D}(\Lambda) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda) = \{v \in W_p^2(Q) : (\partial v/\partial\nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$, определенный по формуле (3.10).

Если выполнены условия леммы 3.1, то в силу этой леммы

$$w_{g_i} = w(g_i(x)) = \begin{cases} 2\pi m \quad (m\in\mathbb{Z}), & g_i(x)\in Q,\\ 0, & g_i(x)\notin Q\end{cases}$$

и $\sin w_{g_i} = 0$. Тогда $\Lambda v = D\Delta v - v$. Известно, что оператор $\Lambda : \mathcal{D}(\Lambda) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, определенный по этой формуле, самосопряженный, спектр $\sigma(\Lambda)$ дискретный и $\sigma(\Lambda) \subset (-\infty, 0)$. По теореме из [23, § 5.4.4] спектр оператора $\Lambda : \mathcal{D}(\Lambda) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ не зависит от p. Таким образом, если выполнены условия леммы 3.1, то

1. задача (3.1)–(3.3) имеет пространственно-однородное стационарное решение тогда и только тогда, когда $K = 2\pi m\Big(1 + \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i\Big)^{-1}$, $m \in \mathbb{Z}$;
2. спектр линеаризованного оператора $\Lambda : \mathcal{D}(\Lambda) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ вещественный и дискретный.

Ниже будет показано, что в этом случае задача (3.1)–(3.3) не имеет бифуркационного семейства периодических решений в окрестности пространственно-однородного стационарного решения.

Поскольку условие 3.3 выполнено при почти всех $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathbb{R}^n$, то будем предполагать, что выполнено следующее условие, являющееся необходимым для существования бифуркационного семейства периодических решений.

Условие 3.4. $g_i(Q) \subseteq Q, \ \ i = 1, \ldots, N.$

Тогда пространственно-однородное стационарное решение задачи (3.1)–(3.3) удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$w = K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos w\Big). \tag{3.12}$$

Условие 3.5. $1 + \widehat{K} \sin \widehat{w} \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i \neq 0$, *где* $\widehat{w}$ *— решение уравнения* (3.12) *для* $K = \widehat{K}$.

Из теоремы о неявной функции вытекает следующее утверждение (см. лемму 2 в [14]).

Лемма 3.2. *Пусть выполнено условие* 3.5. *Тогда для некоторого* $\varkappa_0 > 0$ *существует аналитическая функция* $w = w(\varkappa)$, $\varkappa \in (-\varkappa_0, \varkappa_0)$, *удовлетворяющая уравнению* (3.12) *при* $K = \widehat{K} + \varkappa$, *причем* $w(0) = \widehat{w}$.

В дальнейшем будем предполагать, что условия 3.4, 3.5 выполняются. Положим $K = \widehat{K} + \varkappa$. Тогда по лемме 3.2 в некоторой окрестности точки $\varkappa = 0$ существует аналитическая функция $w = w(\varkappa)$, удовлетворяющая уравнению (3.12) для $K = \widehat{K} + \varkappa$, такая что $w(0) = \widehat{w}$. Запишем решение $u(x,t) = u(x,t,\varkappa)$ задачи (3.1), (3.2) в виде $u(x,t,\varkappa) = w(\varkappa) + v(x,t,\varkappa)$. Уравнение (3.9) примет вид

$$v_t = f(v, \varkappa), \tag{3.13}$$

где $f(v,\varkappa) = D\Delta v - v + (\widehat{K} + \varkappa)\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i\Big(\cos(w(\varkappa) + v_{g_i}) - \cos w(\varkappa)\Big)$.

Очевидно, $f_v(0,\varkappa)v = D\Delta v - v - (\widehat{K} + \varkappa)\sin w(\varkappa)\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i v_{g_i}$.

Введем оператор $\Lambda(\varkappa) : \mathcal{D}(\Lambda(\varkappa)) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda(\varkappa)) = \{v \in W_p^2(Q) : (\partial v/\partial\nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$ по формуле $\Lambda(\varkappa) = f_v(0,\varkappa)$.

Уравнение (3.13) примет вид

$$v_t = \Lambda(\varkappa)v + \mathcal{N}(v,\varkappa), \tag{3.14}$$

где

$$\Lambda(\varkappa)v = D\Delta v - v - (\widehat{K} + \varkappa)\sin w(\varkappa)\sum_{i=1}^{N}\gamma_i v_{g_i},$$

$$\mathcal{N}(v,\varkappa) = (K + \varkappa)\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\Big(\cos(w(\varkappa) + v_{g_i}) - \cos w(\varkappa) + v_{g_i}\sin w(\varkappa)\Big).$$

Обозначим $\Lambda_0 = \Lambda(0)$. Ясно, что

$$\Lambda_0 v = D\Delta v - v - \widehat{K}\sin\widehat{w}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i v_{g_i}.$$

3.3 Спектральные свойства линеаризованного оператора

Рассмотрим теперь линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор $\Lambda(\varkappa)$. В дальнейшем будем предполагать, что выполняется следующее условие.

Условие 3.6. $\widehat{w} \neq \pi m, \ m \in \mathbb{Z}$.

В противном случае оператор $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ самосопряженный и, следовательно, его спектр вещественный.

Введем линейный неограниченный оператор $\mathcal{A}_0 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \{v \in W_p^2(Q) : \partial v/\partial\nu\big|_{\partial Q} = 0\}$ по формуле $\mathcal{A}_0 v = D\Delta v$, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Определим также ограниченный оператор $\mathcal{A}_g : L_p(Q) \to L_p(Q)$ по формуле

$$(\mathcal{A}_g v)(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i v(g_i(x)), \tag{3.15}$$

где $a_i = -\widehat{K}\gamma_i \sin\widehat{w}$. Очевидно, что $\Lambda_0 = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_g - I$.

Обозначим через $\mathcal{B}(L_p(Q))$ пространство линейных ограниченных операторов в $L_p(Q)$. Пусть $\|\cdot\|_p$ — норма оператора из $\mathcal{B}(L_p(Q))$.

Следующая лемма была доказана в работе [20] при $N = 1$, т. е. для $(\mathcal{A}_g v)(x) = av(g(x))$.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия* 3.2, 3.4, 3.5 *и* 3.6. *Тогда для любого* $\pi/2 < \theta < \pi$ *существует* $\xi \in \mathbb{R}$ *такое, что спектр* $\sigma(\Lambda_0) \subset \mathbb{C} \setminus S_{\theta\xi}$ *и*

$$\|(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1}\|_p \leqslant M|\lambda - \xi|^{-1} \qquad (\xi \neq \lambda,\ \lambda \in S_{\theta\xi}), \tag{3.16}$$

где $S_{\theta\xi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \xi)| \leqslant \theta\}$, *а число* $M > 0$ *не зависит от* λ.

Более того, резольвента $(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$ *— компактный оператор при* $\lambda \notin \sigma(\Lambda_0)$. *Следовательно, спектр* $\sigma(\Lambda_0)$ *дискретный.*

Доказательство. По теореме о лучах минимального роста [26, теорема 2.1] для любого $\pi/2 < \theta < \pi$ существует $q > 0$ такое, что $\sigma(\mathcal{A}_0 - I) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega_{\theta q}$ и

$$\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\|_p \leqslant M_1|\lambda|^{-1}, \quad \lambda \in \Omega_{\theta q}, \tag{3.17}$$

где $M_1 > 0$ не зависит от λ, $\Omega_{\theta q} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leqslant \theta,\ |\lambda| \geqslant q\}$.

Рассмотрим оператор $\Lambda_0 - \lambda I : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$, где $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_0 - I)$. Очевидно,

$$\Lambda_0 - \lambda I = (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)(I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g).$$

В силу (3.17) имеем

$$\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_p \leqslant M_1\|\mathcal{A}_g\|_p \cdot |\lambda|^{-1}.$$

При $|\lambda| > 2M_1\|\mathcal{A}_g\|_p$ получим $\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_p \leqslant 1/2$. Отсюда

$$\|I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_p \geqslant 1/2,$$

поэтому

$$\|(I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g)^{-1}\|_p \leqslant 2.$$

Значит, оператор $\Lambda_0 - \lambda I$ имеет ограниченный обратный $(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$ для $\lambda \in \Omega_{\theta q_0}$, где $q_0 = \max\{2M_1\|\mathcal{A}_g\|_p, q\}$. Более того,

$$\|(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1}\|_p \leqslant 2M_1|\lambda|^{-1}, \quad \lambda \in \Omega_{\theta q_0}. \tag{3.18}$$

Обозначим $\xi = q_0/\sin\theta$. Очевидно, $S_{\theta\xi} \subset \Omega_{\theta q_0}$ и $|\lambda - \xi| \leqslant |\lambda| + |\xi| \leqslant |\lambda| + |\lambda|/\sin\theta$ для $\lambda \in S_{\theta\xi}$. Поэтому из (3.18) следует (3.16) для $M = 2M_1(1 + 1/\sin\theta)$.

Компактность резольвенты $(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$ для $\lambda \notin \sigma(\Lambda_0)$ следует из теоремы Банаха об обратном операторе и компактности вложения $W_p^2(Q)$ в $L_p(Q)$. Дискретность спектра вытекает из теоремы об операторе с компактной резольвентой [11, гл. III, § 6, теорема 6.29]. $\square$

Лемма 3.4^0. *Пусть выполнены условия* 3.2, 3.4, 3.5 *и* 3.6. *Тогда оператор* $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *имеет дискретный спектр, удовлетворяющий условию* $\sigma(\Lambda_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2 - 1,\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2\}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1. Действительно, оператор $\mathcal{A}_0 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ самосопряженный. Поэтому, как известно [11, гл. V, § 3], спектр $\sigma(\mathcal{A}_0 - I)$ вещественный и

$$\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\|_2 \leqslant |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{3.19}$$

Так как оператор $\mathcal{A}_g$ ограничен, получим

$$\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_2 \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2 |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{3.20}$$

Очевидно, для $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_0 - I)$ можно записать

$$\Lambda_0 - \lambda I = (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)(I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g). \tag{3.21}$$

При $|\operatorname{Im}\lambda| > \|\mathcal{A}_g\|_2$ из (3.20) получим $\|(\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_2 \leqslant c_1$, где $c_1 < 1$. Отсюда вытекает оценка $\|I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g\|_2 \geqslant c_2 > 0$, следовательно, существует ограниченный оператор $(I + (\mathcal{A}_0 - I - \lambda I)^{-1}\mathcal{A}_g)^{-1}$. Поэтому из (3.19), (3.21) следует, что $\sigma(\Lambda_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2\}$. Более того, по лемме 3.3 спектр $\sigma(\Lambda_0)$ дискретный.

Интегрируя по частям, для $u \in \mathcal{D}(\Lambda_0)$ мы имеем

$$\operatorname{Re}(\Lambda_0 u, u)_{L_2(Q)} = -D \int\limits_Q |\nabla u|^2\, dx - \int\limits_Q |u|^2\, dx + \operatorname{Re} \int\limits_Q \mathcal{A}_g u\, \overline{u}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant (\|\mathcal{A}_g\|_2 - 1)\|u\|^2_{L_2(Q)}.$$

Следовательно, $\sigma(\Lambda_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2 - 1\}$. □

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия* 3.2, 3.4, 3.5 *и* 3.6. *Предположим, что* $g_i \in C^\infty(\overline{Q})$ *и* $J_{g_i}(x) \neq 0$, $x \in \overline{Q}$, *где* $J_{g_i}(x)$ — *якобиан преобразования* $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$.

Тогда спектр оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ *для любого* $p > 1$ *удовлетворяет условию* $\sigma(\Lambda_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2 - 1,\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2\}$.

Доказательство. 1. Следуя доказательству аналогичной леммы 3.2 в [20], вначале докажем, что спектр оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ не зависит от p. Пусть $u_s(x)$ — собственная функция оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$, соответствующая собственному значению λ_s. Тогда $u_s \in W_p^2(Q)$ является решением краевой задачи

$$\Delta u_s(x) - u_s(x) - \lambda_s u_s(x) = -\sum_{i=1}^N a_i u_s(g_i(x)), \quad x \in Q, \tag{3.22}$$

$$\left.\frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right|_{\partial Q} = 0. \tag{3.23}$$

По условию преобразования $g_i(x)$ невырожденные и $g_i \in C^\infty(\overline{Q})$, $i = 1, \ldots, N$. Поэтому правая часть уравнения (3.22) принадлежит $W_p^2(Q)$. Следовательно, по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических задач [23, § 5.4.1] имеем $u_s \in W_p^4(Q)$. Используя эти рассуждения k раз, мы получим $u_s \in W_p^{2+2k}(Q)$. В силу произвольности k из теоремы вложения имеем $u_s \in C^\infty(\overline{Q})$. Поэтому u_s является собственной функцией оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_{p_1}(Q) \to L_{p_1}(Q)$, соответствующей собственному значению λ_s, для любого $p_1 > 1$. Таким образом, спектр оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ не зависит от p.

2. Поскольку спектр оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ не зависит от p, рассмотрим оператор $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$. По лемме 3.4^0 имеем $\sigma(\Lambda_0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2 - 1,\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \|\mathcal{A}_g\|_2\}$. □

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия* 3.1, 3.2, 3.4, 3.5 *и* 3.6. *Предположим, что преобразования* $g_i \in C^1(\overline{Q})$ *таковы, что* $g_i^2(x) \equiv x$ *и* $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$. *Тогда оператор* $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ *самосопряженный.*

Доказательство. Из условия $g_i^2(x) \equiv x$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$, и условия 3.5 следует $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$. Действительно, так как преобразование g_i взаимно-однозначно, из $g_i^2(x) \equiv x$ получим $g_i^{-1}(x) = g_i(x)$, $x \in Q$. Согласно условию 3.4, $g_i(Q) \subseteq Q$. Следовательно, любая точка $x \in Q$ имеет прообраз $g_i^{-1}(x) = g_i(x) \in Q$. Таким образом, $g_i(Q) = Q$.

Поскольку $|J_{g_i}(x)| \equiv 1$, $g_i^2(x) \equiv x$ и $g_i(Q) = Q$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, N$, с помощью замены переменных $y^i = g_i(x)$ получим

$$(\mathcal{A}_g u, v)_{L_2(Q)} = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_Q a_i u(g_i(x))\overline{v(x)}\, dx = \\ = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_Q u(y^i) a_i \overline{v(g_i^{-1}(y^i))} |J_{g_i^{-1}}(y^i)|\, dy^i = \\ = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_Q u(y^i) a_i \overline{u(g_i(y^i))}\, dy^i = (u, \mathcal{A}_g v)_{L_2(Q)}$$

для всех $u, v \in L_2(Q)$.

Таким образом, ограниченный оператор $\mathcal{A}_g : L_2(Q) \to L_2(Q)$ самосопряженный. Поскольку $\Lambda_0 = \mathcal{A}_0 - I + \mathcal{A}_g$, то оператор $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ самосопряженный. $\square$

3.4 Бифуркация периодических решений

В этом разделе, следуя [35] и используя результаты из §§ 3.1–3.3, получим теорему о бифуркации периодических решений задачи (3.1), (3.2). Будем предполагать, что линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda_0) = \{u \in W_2^2(Q) : (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$, заданный по формуле

$$\Lambda_0 v = D\Delta v - v - \widehat{K} \sin \widehat{w} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i v_{g_i},$$

является нормальным. Это позволит использовать базисность в $L_2(Q)$ собственных функций оператора Λ_0. Кроме того, такое предположение естественным образом выполняется для наиболее часто используемых на практике физических постановок задач (см. [10, 14, 33, 39]).

Поскольку нормальность оператора Λ_0 эквивалентна нормальности оператора $\Lambda_0 + I$, применим теорему 1.3 из § 1.2 совместно с условиями 2.1 и 2.2 из § 2.1 и получим следующие результаты.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.2. *Тогда оператор* Λ_0 — *нормальный.*

Исследование бифуркации периодических решений задачи (3.1), (3.2) проводится по той же схеме, что и в случае одного преобразования пространственных переменных (см. [35]). Для полноты изложения приведем его целиком.

В силу теоремы 1.2 из § 1.2 будем считать, что $M > 0$, иначе оператор Λ_0 окажется самосопряженным.

Пусть $\Omega_T = Q \times (0, T)$. Обозначим через $W_2^{2,1}(\Omega_T)$ пространство функций из $L_2(\Omega_T)$, таких что все их обобщенные производные вплоть до второго порядка по x и первая обобщенная производная по t принадлежат пространству $L_2(\Omega_T)$. Это банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(\Omega_T)} = \left\{ \int\limits_{\Omega_T} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant 2} |\mathcal{D}_x^\alpha u|^2 + |\mathcal{D}_t u|^2 \right) dxdt \right\}^{1/2}.$$

Из леммы 2.3 в [35] вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть выполнены условия* 3.2 *и* 3.4, *и пусть* $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — *вещественнозначная функция, такая что* $|\Phi^{(m)}(y)| \leqslant C$ *при* $y \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \ldots$, *где* $C > 0$ *не зависит от* y, m. *Тогда отображения* $v \mapsto \Phi(v_{g_i})$ $(i = 1, \ldots, N)$ *из* $W_2^{2,1}(\Omega_T)$ *в* $L_2(\Omega_T)$ *являются аналитическими в каждой точке пространства* $W_2^{2,1}(\Omega_T)$.

Из лемм 3.2, 3.6 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.7. *Пусть выполнены условия* 3.2, 3.4, 3.5. *Тогда отображения* $(v, \varkappa) \mapsto \Lambda(\varkappa)v$, $(v, \varkappa) \mapsto \mathcal{N}(v, \varkappa)$ *из* $W_2^{2,1}(\Omega_T) \times (-\varkappa_0, \varkappa_0)$ *в* $L_2(\Omega_T)$ *являются аналитическими в некоторой окрестности точки* $(0, 0)$.

В силу леммы 3.7 представим оператор $\Lambda(\varkappa)v$ в виде

$$\Lambda(\varkappa)v = \Lambda_0 v + \varkappa\Lambda_1 v + \varkappa^2\Lambda_2(\varkappa)v,$$

где

$$\Lambda_1 v = \sum_{i=1}^{N} l_i v_{g_i},$$

$$l_i = -\gamma_i \left[\sin\widehat{w} + \widehat{K}\cos\widehat{w} \left(1 + \cos\widehat{w}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\right)\left(1 + \widehat{K}\sin\widehat{w}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\right)^{-1}\right],$$

$$\|\Lambda_2(\varkappa)v\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant c\|v\|_{L_2(\Omega_T)}.$$

Из теоремы 3.1 и лемм 2.2, 3.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.2. *Тогда в* $L_2(Q)$ *существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций оператора* Λ_0.

Из леммы 3.3 следует, что оператор $\Lambda(\varkappa)$ имеет компактную резольвенту. Следовательно, спектр $\sigma(\Lambda(\varkappa))$ дискретный. Обозначим через $\lambda_s(\varkappa) = \delta_s(\varkappa)+i\omega_s(\varkappa)$, $s = 1, 2, \ldots$, собственные значения оператора $\Lambda(\varkappa)$. Из леммы 2.1 в [28] следует, что $\delta_s(\varkappa)$ и $\omega_s(\varkappa)$ бесконечно дифференцируемы при достаточно малых $\varkappa$.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 3.7. *При* $\varkappa = 0$ *существуют в точности два простых чисто мнимых комплексно сопряженных собственных значения* $\lambda_1(0) = i\widehat{\omega}$, $\lambda_2(0) = -i\widehat{\omega}$ *оператора* $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$, *так что* $\delta_1(0) = \delta_2(0) = 0$, $\omega_1(0) = -\omega_2(0) = \widehat{\omega}$. *При этом выполнено* $\widehat{\omega} > 0$ *и*

$$\delta_1'(0) = \left.\frac{\partial\delta_1(\varkappa)}{\partial\varkappa}\right|_{\varkappa=0} \neq 0.$$

Замечание 3.2. Условие 3.6 следует из условия 3.7. Действительно, при нарушении условия 3.6 оператор Λ_0 становится самосопряженным, а его спектр — вещественным, откуда следует нарушение условия 3.7. Кроме того, если условие 3.7 выполнено, то преобразования $g_1, \dots, g_N$ не удовлетворяют условиям леммы 3.5.

Обозначим через $u_1(x) = p(x) + iq(x)$ собственную функцию оператора Λ_0, соответствующую собственному значению $\lambda_1(0)$. Будем считать, что $\|u_1\|_{L_2(Q)} = 1$. Через M_1 обозначим собственное подпространство оператора Λ_0, соответствующее собственному значению $\lambda_1(0)$. Пусть P_1 — оператор ортогональной проекции на M_1 в пространстве $L_2(Q)$.

Лемма 3.8. *Пусть выполнены условия* 3.5, 2.1, 2.2, 3.7. *Тогда*

$$\delta_1'(0) = \sum_{i=1}^{N} l_i \int\limits_Q (p(g_i(x))p(x) + q(g_i(x))q(x))\,dx \neq 0.$$

Доказательство. В силу условий 3.5, 2.1, 2.2, 3.7, компактности резольвенты $R(\lambda, \Lambda_0) : L_2(Q) \to L_2(Q)$ и ограниченности операторов Λ_1, Λ_2 в $L_2(Q)$ получим, что выполнены условия теоремы 2.6 в [11, гл. VIII, § 2]. По этой теореме и теореме 3.2 мы имеем

$$\lambda_1(\varkappa) = \lambda_1(0) + \varkappa\mu_1 + o(\varkappa),$$

где μ_1 — собственное значение оператора $P_1\Lambda_1$, действующего в одномерном подпространстве M_1. Тогда, учитывая, что $\|u_1\|_{L_2(Q)} = 1$, получим

$$\left.\frac{d\delta_1(\varkappa)}{d\varkappa}\right|_{\varkappa=0} = \operatorname{Re}\mu_1 = \operatorname{Re}(\Lambda_1 u_1, u_1)_{L_2(Q)} = \\ = \sum_{i=1}^{N} l_i \int\limits_Q (p(g_i(x))p(x) + q(g_i(x))q(x))\,dx.$$

□

Введем новую переменную времени $\tau = \omega\widehat{\omega}t$, где $\omega = \omega(\varkappa)$ — неизвестная частота. Тогда уравнение (3.14) примет вид

$$\omega(\varkappa)v_\tau = \widehat{\Lambda}(\varkappa)v + \widehat{\mathcal{N}}(v,\varkappa), \tag{3.24}$$

где $\widehat{\Lambda}(\varkappa) = \widehat{\Lambda}_0 + \varkappa\widehat{\Lambda}_1 + \varkappa^2\widehat{\Lambda}_2(\varkappa)$, $\widehat{\Lambda}_k = \widehat{\omega}^{-1}\Lambda_k$ $(k = 0,1,2)$, $\widehat{\mathcal{N}}(v,\varkappa) = \widehat{\omega}^{-1}\mathcal{N}(v,\varkappa)$. Очевидно, что в силу условия 3.7 оператор $\widehat{\Lambda}(0)$ имеет пару комплексно сопряженных собственных значений $\pm i$.

Чтобы изучать 2π-периодические решения уравнения (3.24) с условием Неймана на границе $\Gamma_{2\pi} = \partial Q \times (0,2\pi)$, введем подпространство

$$W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}) = \left\{ u \in W^{2,1}_2(\Omega_{2\pi}) : \frac{\partial u}{\partial\widetilde{\nu}}\Big|_{\Gamma_{2\pi}} = 0,\ u\big|_{t=0} = u\big|_{t=2\pi} \right\}.$$

Периодическое решение уравнения (3.24) задается вектор-функцией $(v,\omega,\varkappa) \in W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{T} : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \subset L_2(\Omega_{2\pi}) \to L_2(\Omega_{2\pi})$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{T}) = W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi})$, действующий по формуле

$$\mathcal{T}v = v_\tau - \widehat{\Lambda}_0 v.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{T} : W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}) \to L_2(\Omega_{2\pi})$ ограничен. Обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ и $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ соответственно ядро и образ оператора $\mathcal{T}$. Зададим формально сопряженный оператор $\mathcal{T}^* : \mathcal{D}(\mathcal{T}^*) \subset L_2(\Omega_{2\pi}) \to L_2(\Omega_{2\pi})$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*) = W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi})$ по формуле

$$\mathcal{T}^*v = -v_\tau - \widehat{\Lambda}^*_0 v, \quad \widehat{\Lambda}^*_0 v = \widehat{\omega}^{-1}\left(D\Delta v(x) - v(x) - \widehat{K}\sin\widehat{\omega}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i v(g_i^{-1}(x)) \right).$$

Лемма 3.9. *Пусть выполнены условия* 3.5, 2.1, 2.2, 3.7. *Тогда* $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}^*)$, $\dim\mathcal{N}(\mathcal{T}) = 2$ *и* $\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp$. *Кроме того, функции*

$$\psi_1(x,\tau) = \frac{p(x)\cos\tau - q(x)\sin\tau}{\sqrt{\pi}}, \qquad \psi_2(x,\tau) = \frac{p(x)\sin\tau + q(x)\cos\tau}{\sqrt{\pi}}$$

образуют ортонормированный базис в $\mathcal{N}(\mathcal{T})$.

Доказательство.

1. В силу леммы 3.3 спектр $\sigma(\widehat{\Lambda}_0)$ дискретный. Поэтому существует эквивалентное скалярное произведение

$$(u,v)'_{W^2_{2,N}(Q)} = \int\limits_Q \widehat{\Lambda}_0 u \cdot \overline{\widehat{\Lambda}_0 v}\, dx + \int\limits_Q u\overline{v}\, dx \tag{3.25}$$

в подпространстве

$$W^2_{2,N}(Q) = \left\{ u \in W^2_2(Q) : \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial Q} = 0 \right\}.$$

По теореме 3.2 собственные функции u_s $(s = 1, 2, \ldots)$ оператора $\widehat{\Lambda}_0$, соответствующие собственным значениям $\widehat{\lambda}_s = \lambda_s \widehat{\omega}^{-1}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$. Тогда функции $u_s/\sqrt{|\widehat{\lambda}_s|^2 + 1}$ образуют ортонормированный базис в $W^2_{2,N}(Q)$ с эквивалентным скалярным произведением (3.25). Поэтому функции $\exp(ikt)u_s(x)/\sqrt{2\pi}$ $(s = 1, 2, \ldots,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega_{2\pi})$, а функции $\exp(ik\tau)u_s(x)/\sqrt{2\pi(|\widehat{\lambda}_s|^2 + k^2 + 1)}$ образуют ортонормированный базис в $W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi})$ с эквивалентным скалярным произведением, заданным формулой

$$(u,v)'_{W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi})} = \int\limits_0^{2\pi} \Big((u,v)'_{W^2_{2,N}(Q_\tau)} + (u_\tau, v_\tau)_{L_2(Q_\tau)} \Big)\, d\tau, \tag{3.26}$$

где $Q_\tau = Q \times \{\tau\}$.

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{T} v = 0. \tag{3.27}$$

Разложение v в ряд Фурье по системе функций $\left\{\exp(ikt)u_s(x)/\sqrt{2\pi}\right\}$ имеет вид

$$v(x,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} v_{ks} \exp(ik\tau) u_s(x)/\sqrt{2\pi}. \tag{3.28}$$

Из уравнений (3.27), (3.28) получим

$$v_{ks}(ik-\widehat{\lambda}_s)=0, \quad s=1,2,\dots, \quad k=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

По условию 3.7 имеем

$$v_{ks}=0 \quad \text{при} \quad (k,s)\notin\{(1,1)\}\cup\{(-1,2)\}.$$

С другой стороны, поскольку коэффициенты оператора $\widehat{\Lambda}_0$ вещественны, имеет место $u_2(x)=\overline{u_1(x)}$. Отсюда

$$v(x,\tau)=v_{11}\exp(i\tau)u_1(x)\big/\sqrt{2\pi}+v_{-1,2}\exp(-i\tau)\overline{u_1(x)}\big/\sqrt{2\pi}. \tag{3.29}$$

Таким образом, произвольный элемент из $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ имеет вид (3.29), поэтому $\dim\mathcal{N}(\mathcal{T})=2$. В силу леммы 2.2 и теоремы о собственных функциях и собственных значениях ограниченных нормальных операторов [16, гл. 12, теорема 12.12], функции $u_1(x)$ и $\overline{u_1(x)}$ являются собственными функциями оператора $\widehat{\Lambda}_0^*$, отвечающими собственным значениям $-i$ и i, соответственно. Следовательно, $\mathcal{N}(\mathcal{T})=\mathcal{N}(\mathcal{T}^*)$.

Очевидно, что

$$\psi_1(x,\tau)=\operatorname{Re}\{\exp(i\tau)u_1(x)/\sqrt{\pi}\}, \qquad \psi_2(x,\tau)=\operatorname{Im}\{\exp(i\tau)u_1(x)/\sqrt{\pi}\},$$

поэтому $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{N}(\mathcal{T})$. Поскольку $\|u_1\|_{L_2(Q)}=1$ и функции $u_1(x)$, $u_2(x)=\overline{u_1(x)}$ ортогональны в $L_2(Q)$, получим

$$\int\limits_Q (p^2(x)+q^2(x))\,dx=1, \tag{3.30}$$

$$\int\limits_Q (p^2(x)-q^2(x))\,dx=0, \tag{3.31}$$

$$\int\limits_Q p(x)q(x)\,dx=0. \tag{3.32}$$

Из равенств (3.30)–(3.32) получим

$$\|\psi_1\|_{L_2(\Omega_{2\pi})} = \|\psi_2\|_{L_2(\Omega_{2\pi})} = 1, \qquad (\psi_1, \psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})} = 0.$$

Таким образом, функции ψ_1, ψ_2 образуют ортонормированный базис в $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}^*)$.

2. Очевидно, что $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathcal{T}^*)^{\perp}$. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим уравнение

$$\mathcal{T} v = f. \tag{3.33}$$

Покажем, что уравнение (3.33) имеет решение при любом $f \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^{\perp}$. Разложение функции f в ряд Фурье имеет вид

$$f(x,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} f_{ks} \exp(ik\tau) u_s(x)/\sqrt{2\pi},$$

где $f_{11} = f_{-1,2} = 0$.

Рассмотрим функцию $v(x,\tau)$, заданную рядом Фурье

$$v(x,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} v_{ks} \exp(ik\tau) u_s(x)/\sqrt{2\pi}, \tag{3.34}$$

где

$$v_{ks} = \begin{cases} f_{ks}(ik - \widehat{\lambda}_s)^{-1} & \text{при} \quad (k,s) \notin \{(1,1)\} \cup \{(-1,2)\}, \\ 0 & \text{при} \quad (k,s) \in \{(1,1)\} \cup \{(-1,2)\}. \end{cases}$$

В силу леммы 3.4^0 существует $M > 0$, такое что для всех $|k|, s > M$

$$\sqrt{k^2 + |\widehat{\lambda}_s|^2 + 1} \leqslant c_1 |ik - \widehat{\lambda}_s|, \tag{3.35}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от k, s. Из оценки (3.35) следует, что ряд (3.34) сходится в пространстве $W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi})$ с эквивалентным скалярным произведением (3.26). Очевидно, что функция $v(x,\tau)$ является решением (3.33). $\square$

Получим теорему о бифуркации периодических решений задачи (3.1), (3.2) в окрестности пространственно-однородного стационарного решения $\widehat{w}$.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* 3.5, 2.1, 2.2, 3.7.

Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ *существует непрерывная вектор-функция* $\varepsilon \mapsto (v(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon))$ *из* $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ *в* $W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Эта функция аналитическая на интервале* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *и удовлетворяет условиям*

$$v(0) = 0, \quad \omega(0) = 1, \quad \varkappa(0) = 0.$$

Функция $u(x, t, \varepsilon) = w(\varkappa(\varepsilon)) + v(x, \tau, \varepsilon)$ *является* $2\pi(\widehat{\omega}\omega(\varepsilon))^{-1}$*-периодическим по* t *решением задачи* (3.1), (3.2), *где* $\tau = \omega(\varepsilon)\widehat{\omega}t$.

Доказательство. Введем обозначение $\mathcal{R} = P(W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}))$, где P — оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ в пространстве $L_2(\Omega_{2\pi})$. Положим $v(x, \tau, \varepsilon) = \varepsilon z(\varepsilon)$, где $z(\varepsilon) = \eta + \xi(\varepsilon)$, $\eta \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$, $\|\eta\|_{L_2(\Omega_{2\pi})} = 1$, $\xi(\varepsilon) = \xi(x, \tau, \varepsilon) \in \mathcal{R}$, $\xi(0) = 0$. Тогда уравнение (3.24) можно записать в виде

$$\mathcal{T}\xi + (\omega - 1)(\eta_\tau + \xi_\tau) - (\varkappa\widehat{\Lambda}_1 z + \varkappa^2\widehat{\Lambda}_2 z) - \varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{N}}(\varepsilon z, \varkappa) = 0. \qquad (3.36)$$

Разложение η по системе функций $\{\psi_i\}$ имеет вид $\eta = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, где $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Очевидно, что $\eta_\tau = -c_1\psi_2 + c_2\psi_1$, таким образом, $\eta_\tau \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$. Применяя операторы ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ и на одномерные подпространства, порожденные функциями ψ_1, ψ_2, из уравнения (3.36) будем иметь

$$\mathcal{T}\xi + (\omega - 1)\xi_\tau - \varkappa P\widehat{\Lambda}_1\eta - \varkappa P\widehat{\Lambda}_1\xi - \varkappa^2 P\widehat{\Lambda}_2 z - \varepsilon^{-1}P\widehat{\mathcal{N}}(\varepsilon z, \varkappa) = 0, \quad (3.37)$$

$$(\omega-1)c_2-\varkappa(\widehat{\Lambda}_1\xi,\psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})}-\varkappa(\widehat{\Lambda}_1\eta,\psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})}-\varkappa^2(\widehat{\Lambda}_2 z,\psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})}-\\ -\varepsilon^{-1}(\widehat{\mathcal{N}}(\varepsilon z,\varkappa),\psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})}=0, \quad (3.38)$$

$$-(\omega-1)c_1-\varkappa(\widehat{\Lambda}_1\xi,\psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})}-\varkappa(\widehat{\Lambda}_1\eta,\psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})}-\varkappa^2(\widehat{\Lambda}_2 z,\psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})}-\\ -\varepsilon^{-1}(\widehat{\mathcal{N}}(\varepsilon z,\varkappa),\psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})}=0. \quad (3.39)$$

Уравнения (3.37)–(3.39) можно записать в виде нелинейного уравнения

$$F(\xi,\omega,\varkappa,\varepsilon)=0. \quad (3.40)$$

В силу леммы 3.7 отображение $F:\mathcal{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathcal{R}(\mathcal{T})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ является аналитическим в некоторой окрестности точки $(0,1,0,0)$. Нетрудно убедиться, что производная Фреше F' отображения F по переменным $(\xi,\omega,\varkappa)$ в точке $(0,1,0,0)$ имеет вид

$$F'=\begin{pmatrix}\mathcal{T} & 0 & -P\widehat{\Lambda}_1\eta\\ 0 & c_2 & -(\widehat{\Lambda}_1\eta,\psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})}\\ 0 & -c_1 & -(\widehat{\Lambda}_1\eta,\psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})}\end{pmatrix}.$$

Из леммы 3.9 следует, что оператор $\mathcal{T}:\mathcal{R}\to\mathcal{R}(\mathcal{T})$ имеет ограниченный обратный $\mathcal{T}^{-1}$. Следовательно, оператор F' имеет ограниченный обратный $(F')^{-1}$ тогда и только тогда, когда

$$d=\begin{vmatrix} c_2 & -(\widehat{\Lambda}_1\eta,\psi_1)_{L_2(\Omega_{2\pi})}\\ -c_1 & -(\widehat{\Lambda}_1\eta,\psi_2)_{L_2(\Omega_{2\pi})}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Вычисляя определитель, получим

$$d=-\widehat{\omega}^{-1}\sum_{i=1}^{N} l_i\int\limits_Q \big(p(g_i(x))p(x)+q(g_i(x))q(x)\big)\,dx.$$

Из леммы 3.8 и условия 3.7 получим, что $d = -\widehat{\omega}^{-1}\delta_1'(0) \neq 0$. Следовательно, по теореме о неявном операторе [22, теорема 36.5, гл. IX, § 36] существует вектор-функция $\varepsilon \mapsto (\xi(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon))$ из $\mathbb{R}$ в $W^{2,1}_{2,N}(\Omega_{2\pi}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, непрерывная на $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ и аналитическая на $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ для достаточно малых $\varepsilon_0 > 0$. Кроме того, $\xi(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$. □

3.5 Бифуркация Андронова—Хопфа

В этом разделе, следуя [20] и используя результаты из §§ 3.1–3.3, получим теорему о бифуркации Андронова—Хопфа периодических решений задачи (3.1), (3.2). В отличие от подхода, примененного в § 3.4, в настоящем разделе не предполагается, что линеаризованный функционально-дифференциальный оператор Λ_0 является нормальным. Это расширяет класс допустимых преобразований пространственных переменных $g_1, \ldots, g_N$.

Обозначим через $C^{\sigma}_{2\pi}(X)$ пространство всех σ-непрерывных по Гельдеру 2π-периодических функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C^{\sigma}_{2\pi}(X)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant 2\pi} \frac{\|\varphi(t) - \varphi(s)\|_X}{(t-s)^{\sigma}},$$

где X — вещественное банахово пространство, $0 < \sigma < 1$.

Пусть $C^{1,\sigma}_{2\pi}(X)$ — пространство дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$, таких что φ и φ' принадлежат $C^{\sigma}_{2\pi}(X)$. Это банахово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{C^{1,\sigma}_{2\pi}(X)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \|\varphi'\|_{C^{\sigma}_{2\pi}(X)}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}_p(Q)$ пространство Лебега вещественнозначных функций, абсолютно интегрируемых в области Q с показателем p, а через $\mathcal{W}^k_p(Q)$ — пространство Соболева вещественнозначных функций, принадлежащих $\mathcal{L}_p(Q)$ вместе со своими обобщенными производными вплоть до порядка k.

Из леммы 2.3 в [20] вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.10. *Пусть выполнены условия* 3.2 *и* 3.4, *и пусть* $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — *вещественнозначная функция, такая что* $|\Phi^{(m)}(y)| \leqslant M$ *при* $y \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots$, *где* $M > 0$ *не зависит от* y, m.

Тогда отображения $v \mapsto \Phi(v_{g_i})$ $(i = 1, \dots, N)$ *из* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_p(Q))$ *в* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ *являются аналитическими в каждой точке пространства* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_p(Q))$, *где* $p > n/2$.

Из лемм 3.2, 3.10 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.11. *Пусть выполнены условия* 3.2, 3.4, 3.5.

Тогда отображение $(v, \varkappa) \mapsto f(v, \varkappa)$ *из* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_p(Q)) \times (-\varkappa_0, \varkappa_0)$ *в* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ *является аналитическим в некоторой окрестности точки* $(0, 0)$.

Чтобы изучать решения уравнения (3.13) с неизвестным периодом, положим $\tau = \widehat{\omega}\omega(\varkappa)t$, где $\omega(\varkappa)$ — неизвестная частота, близкая к 1.

Рассмотрим теперь 2π-периодические решения уравнения

$$v_\tau = (\widehat{\omega}\omega(\varkappa))^{-1} f(v(\tau), \varkappa), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $\mathcal{W}^2_{p,N}(Q) = \{v \in \mathcal{W}^2_p(Q) : (\partial v/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$.

Теорема 3.4. *Пусть выполняются условия* 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.7. *Зафиксируем* $\sigma \in (0, 1)$ *и* $p > n/2$. *Тогда*:

1. *Существуют некоторое* $\varepsilon_0 > 0$ *и аналитическая вектор-функция* $\varepsilon \mapsto (v(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon))$ *из* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *в* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q)) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

такая что $v(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$ *и* $v(\varepsilon)$ *не постоянна по* τ *при* $\varepsilon \neq 0$.

2. *Функция* $u(x, t, \varepsilon) = w(\varkappa(\varepsilon)) + v(x, \tau, \varepsilon)$ *является* $2\pi(\widehat{\omega}\omega(\varepsilon))^{-1}$*-периодическим по* t *решением задачи* (3.1), (3.2), *где* $\tau = \omega(\varepsilon)\widehat{\omega}t$. *При этом* $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \ldots$, $\varkappa(\varepsilon) = \varepsilon^2\varkappa_2 + \varepsilon^3\varkappa_3 + \ldots$.

3. *Более того, существует* $\delta_0 > 0$, *такое что если* $\overline{\varkappa}, \overline{\omega} \in \mathbb{R}$ *и* $\overline{v} \in C^{\sigma}_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ *удовлетворяют условиям*

$$\overline{v}_\tau = (\widehat{\omega}\overline{\omega})^{-1} f(\overline{v}, \overline{\varkappa}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

$$\|\overline{v}\|_{C^{\sigma}_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))} < \delta_0, \quad |\overline{\varkappa}| < \delta_0, \quad |1 - \overline{\omega}| < \delta_0,$$

то существуют $\theta \in [0, 2\pi)$ *и* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, *такие что* $\overline{\varkappa} = \varkappa(\varepsilon)$, $\overline{\omega} = \omega(\varepsilon)$, $\overline{v}(x, \tau) = v(x, \tau + \theta, \varepsilon)$.

Теорема 3.4 доказывается методом, развитым в работах [20, 28]. Для полноты изложения приведем это доказательство целиком.

Доказательство.

1. Начнем с вспомогательных результатов. Обозначим через $\widehat{L}$ сужение оператора $\widehat{\Lambda}$ на пространства вещественнозначных функций.

В силу лемм 3.3, 3.11 и леммы 2.1 в [28] существует $\varkappa_1 \in (0, \varkappa_0)$ и функции $\alpha, \beta \in C^\infty((-\varkappa_1, \varkappa_1); \mathbb{R})$, $r, s \in C^\infty((-\varkappa_1, \varkappa_1), \mathcal{D}(\widehat{L}_0))$, такие что

$$\widehat{\Lambda}(\varkappa)(r(\varkappa) + is(\varkappa)) = (\alpha(\varkappa) + i\beta(\varkappa))(r(\varkappa) + is(\varkappa)), \tag{3.41}$$

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = 1. \tag{3.42}$$

Положим $e_1 = r(0)$, $e_2 = s(0)$. Тогда

$$\widehat{\Lambda}_0(e_1 \pm ie_2) = \pm i(e_1 \pm ie_2), \tag{3.43}$$

т. е.

$$\widehat{L}_0 e_1 = -e_2, \quad \widehat{L}_0 e_2 = e_1. \tag{3.44}$$

В силу леммы 3.3 и теоремы 5.2 в [32, гл. 2] оператор $\widehat{\Lambda}_0$ является генератором аналитической полугруппы T_τ в $L_p(Q)$. Поэтому из (3.43) и теоремы 8.3 в [32, гл. 1] следует

$$T_\tau(e_1 + ie_2) = e^{i\tau}(e_1 + ie_2).$$

Таким образом,

$$T_\tau e_1 = e_1 \cos\tau - e_2 \sin\tau, \quad T_\tau e_2 = e_1 \sin\tau + e_2 \cos\tau. \tag{3.45}$$

Обозначим через $\mathcal{X}$ подпространство в $\mathcal{L}_p(Q)$, натянутое на векторы e_1 и e_2. Положим $X = \{e + ih : e, h \in \mathcal{X}\}$. Введем оператор

$$P = \sum_{\pm} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi \pm i| = \varepsilon} (\xi I - \widehat{\Lambda}_0)^{-1} d\xi,$$

где ε достаточно мало. Очевидно, что P является оператором проектирования в $L_p(Q)$ на X, причем $P(\mathcal{L}_p(Q)) = \mathcal{X}$ (см. [28]).

Пусть $q = p/(p-1)$. Тогда существуют $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_q(Q)$, такие что

$$Py = \langle y, \varphi_1 \rangle e_1 + \langle y, \varphi_2 \rangle e_2 \quad \text{для любого} \quad y \in \mathcal{L}_p(Q), \tag{3.46}$$

$$\langle e_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \tag{3.47}$$

Поскольку операторы $\widehat{L}_0$ и P коммутируют, то из (3.44), (3.45)–(3.47) получаем

$$T_\tau^* \varphi_1 = \varphi_1 \cos\tau + \varphi_2 \sin\tau, \quad T_\tau^* \varphi_2 = -\varphi_1 \sin\tau + \varphi_2 \cos\tau, \tag{3.48}$$

$$\widehat{L}_0^* \varphi_1 = \varphi_2, \quad \widehat{L}_0^* \varphi_2 = -\varphi_1. \tag{3.49}$$

2. Положим $F(v,\omega,\varkappa) = \omega v_\tau - \widehat{\omega}^{-1} f(v,\varkappa)$. В силу леммы 3.11 отображение $F : C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q)) \times (0,2) \times (-\varkappa_0,\varkappa_0) \to C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ аналитическое в некоторой окрестности точки $(0,1,0)$.

Очевидно, что $F_v(v,\omega,\varkappa)\xi = \omega\xi_\tau - \widehat{\omega}^{-1} f_v(v,\varkappa)\xi$. Следовательно,

$$F_v(0,1,0)\xi = \xi_\tau - \widehat{\Lambda}_0\xi. \tag{3.50}$$

По теореме 1.3 в [28] имеем $\mathcal{N}(F_v(0,1,0)) = \{T_t y : y \in \mathcal{X}\}$,

$$\mathcal{R}(F_v(0,1,0)) = \left\{ z \in C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q)) : P\int\limits_0^{2\pi} T_{2\pi - s} z(s)\,ds = 0 \right\}. \tag{3.51}$$

Поскольку $\dim\mathcal{X} = 2$, а $P(\mathcal{L}_p(Q)) = \mathcal{X}$, имеет место $\dim\mathcal{N}(F_v(0,1,0)) = 2$, $\operatorname{codim}\mathcal{R}(F_v(0,1,0)) = 2$. Поэтому существует замкнутое подпространство $V \subset C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$, такое что $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q)) = \mathcal{N}(F_v(0,1,0)) \oplus V$.

Введем отображение $\Phi : V \times (0,2) \times (-\varkappa_0,\varkappa_0) \times (-1,1) \to C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ по формуле

$$\Phi(\xi,\omega,\varkappa,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} F(\varepsilon(T_\tau e_1 + \xi),\omega,\varkappa), & \varepsilon \neq 0, \\ F_v(0,\omega,\varkappa)(T_\tau e_1 + \xi), & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что Φ аналитическое в некоторой окрестности точки $(0,1,0,0)$, причем $\Phi(0,1,0,0) = 0$.

Чтобы доказать существование аналитических функций $\xi = \xi(\varepsilon)$, $\omega = \omega(\varepsilon)$, $\varkappa = \varkappa(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, таких что $\Phi(\xi(\varepsilon),\omega(\varepsilon),\varkappa(\varepsilon),\varepsilon) = 0$ и $\xi(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$, в силу теоремы о неявном операторе [22, теорема 36.5, гл. 9, § 36] достаточно убедиться, что отображение $\Phi' : V \times \mathbb{R}^2 \to C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$, заданное формулой $\Phi'(\widehat{\xi},\widehat{\omega},\widehat{\varkappa}) = \Phi_\xi(0,1,0,0)\widehat{\xi} + \Phi_\omega(0,1,0,0)\widehat{\omega} + \Phi_\varkappa(0,1,0,0)\widehat{\varkappa}$, является изоморфизмом.

Из (3.44) и равенств $L(\varkappa) = \widehat{\omega}^{-1} f_v(0,\varkappa)$ и $T'_\tau e_1 = T_\tau L_0 e_1$ следует, что

$$\Phi'(\widehat{\xi}, \widehat{\omega}, \widehat{\varkappa}) = F_v(0,1,0)\widehat{\xi} + T'_\tau e_1 \widehat{\omega} - L'(0) T_\tau e_1 \widehat{\varkappa} =$$
$$= F_v(0,1,0)\widehat{\xi} - T_\tau e_2 \widehat{\omega} - L'(0) T_\tau e_1 \widehat{\varkappa}.$$

Докажем, что отображение Φ' инъективно. Полагая $\Phi'(\widehat{\xi}, \widehat{\omega}, \widehat{\varkappa}) = 0$, в силу (3.45) получим

$$\int\limits_0^{2\pi} T_{2\pi-s}(F_v(0,1,0)\widehat{\xi})(s)ds - 2\pi e_2 \widehat{\omega} - \int\limits_0^{2\pi} T_{2\pi-s} L'(0) T_s e_1 ds \widehat{\varkappa} = 0.$$

Применим к левой и правой частям полученного равенства функционал φ_1. Тогда, используя (3.46) и (3.51), будем иметь

$$\int\limits_0^{2\pi} \langle T_{2\pi-s} L'(0) T_s e_1,\, \varphi_1 \rangle \, ds \widehat{\varkappa} = 0. \tag{3.52}$$

Из (3.41), (3.42) следует, что $L'(0)e_1 = -L_0 r'(0) + \alpha'(0)e_1 - \beta'(0)e_2 - s'(0)$, $L'(0)e_2 = -L_0 s'(0) + \beta'(0)e_1 + \alpha'(0)e_2 + r'(0)$. Отсюда и из равенств (3.45), (3.48) и (3.49) получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \langle T_{2\pi-s} L'(0) T_s e_1,\, \varphi_1 \rangle \, ds = 2\pi \widehat{\omega}^{-1} \delta'_1(0). \tag{3.53}$$

В силу условия $\delta'_1(0) \neq 0$ и равенства (3.52) имеем $\widehat{\varkappa} = 0$.

Согласно (3.45), (3.47),

$$\int\limits_0^{2\pi} \langle T_{2\pi-s} T_s e_2,\, \varphi_2 \rangle ds = 2\pi. \tag{3.54}$$

Поэтому в силу (3.46), (3.51) имеем $T_t e_2 \notin \mathcal{R}(F_v(0,1,0))$. Таким образом, из равенства $\Phi'(\widehat{\xi}, \widehat{\omega}, \widehat{\varkappa}) = 0$ следует $\widehat{\xi} = 0$, $\widehat{\omega} = 0$. Итак, отображение Φ' инъективно.

Докажем, что отображение $\Phi' : V \times \mathbb{R}^2 \to C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ сюръективно. В силу (3.46), (3.51), (3.53), (3.54) имеем $T_\tau e_2, L'(0)T_\tau e_1 \notin \mathcal{R}(F_v(0,1,0))$. Поскольку $\operatorname{codim}\mathcal{R}(F_v(0,1,0)) = 2$, достаточно показать, что функции $T_\tau e_2$, $L'(0)T_\tau e_1$ линейно независимы. Действительно, пусть $c_1 T_\tau e_2 + L'(0)T_\tau e_1 = 0$. Тогда $c_1 2\pi e_2 + c_2 \int\limits_0^{2\pi} T_{2\pi-s}L'(0)T_s e_1 ds = 0$. Применяя функционал φ_1, в силу (3.47) и (3.53) получаем $2\pi\widehat{\omega}^{-1}\delta_1'(0)c_2 = 0$, т. е. $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$. Поэтому отображение $\Phi' : V \times \mathbb{R}^2 \to C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ является изоморфизмом. Итак, существование аналитических функций $\xi = \xi(\varepsilon)$, $\omega = \omega(\varepsilon)$ и $\varkappa = \varkappa(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, таких что $\Phi(\xi(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ и $\xi(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$, установлено.

3. Изложим способ вычисления коэффициентов разложения функций $\omega(\varepsilon)$ и $\varkappa(\varepsilon)$ в степенные ряды. Подставляя выражения с неопределенными коэффициентами $\xi = \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \ldots$, $\omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots$, $\varkappa = \varepsilon\varkappa_1 + \varepsilon^2\varkappa_2 + \ldots$ в функционально-дифференциальное уравнение $\Phi(\xi, \omega, \varkappa, \varepsilon) = 0$, получаем

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^{-1}\omega(\varepsilon)\varepsilon(T'_\tau e_1 + \xi_\tau(\varepsilon)) - (\widehat{\omega}\varepsilon)^{-1} f(\varepsilon(T_\tau e_1 + \xi(\varepsilon)), \varkappa(\varepsilon)) = \\
= (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots)(T'_\tau e_1 + \varepsilon\xi_{1\tau} + \varepsilon^2\xi_{2\tau} + \ldots) - \\
- (\widehat{\omega}\varepsilon)^{-1}\Big\{ f(0,0) + f_v(0,0)\varepsilon(T_\tau e_1 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \ldots) + \\
+ f_\varkappa(0,0)\varkappa + \frac{1}{2} f_{vv}(0,0)(T_\tau e_1 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \ldots)^2\varepsilon^2 + \\
+ f_{v\varkappa}(0,0)(T_\tau e_1 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \ldots)(\varepsilon\varkappa_1 + \varepsilon^2\varkappa_2 + \ldots)\varepsilon + \frac{1}{2} f_{\varkappa\varkappa}(0,0)\varkappa^2 + \ldots \Big\} = 0.
\end{gathered}
\tag{3.55}
$$

По определению отображения f имеем $f(0, \varkappa) = 0$. Поэтому $f(0,0) = 0$, $f_\varkappa(0,0) = 0$, $f_{\varkappa\varkappa}(0,0) = 0$. Таким образом, приравнивая в (3.55) к нулю сумму членов при ε и используя соотношение (3.44), получим уравнение

$$\xi_{1\tau} - \omega_1 T_\tau e_2 - L_0\xi_1 - \frac{1}{2}\,\widehat{\omega}^{-1} f_{vv}(0,0)(T_\tau e_1)^2 - \varkappa_1 L'(0) T_\tau e_1 = 0,$$

которое в силу (3.50) примет вид

$$F_v(0,1,0)\xi_1 = z, \quad z = \omega_1 T_\tau e_2 + \varkappa_1 L'(0)T_\tau e_1 - \frac{1}{2}\,\widehat{K}\cos\widehat{\omega}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i((T_\tau e_1)_{g_i})^2.$$

Из (3.45), (3.48) следует

$$\int\limits_0^{2\pi}\left\langle T_{2\pi-s}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i((T_s e_1)_{g_i})^2,\ \varphi_j\right\rangle ds =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left\langle\sum_{i=1}^{N}\gamma_i(e_{1g_i}\cos s - e_{2g_i}\sin s)^2,\ T^*_{2\pi-s}\varphi_j\right\rangle ds =$$

$$= \sum_{k,l,m=1}^{2}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\langle e_{kg_i}e_{lg_i},\ \varphi_m\rangle\int\limits_0^{2\pi}\sum_{q=1}^{3}\left(a_q^{klm}\cos qs + b_q^{klm}\sin qs\right)ds = 0.$$

Поэтому, согласно (3.51), имеем $\widehat{K}\cos\widehat{\omega}\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i((T_\tau e_1)_{g_i})^2 \in \mathcal{R}(F_v(0,1,0))$. С другой стороны, в силу второй части доказательства $T_\tau e_2, L'(0)T_\tau e_1 \notin \mathcal{R}(F_v(0,1,0))$. Следовательно, $\omega_1 = \varkappa_1 = 0$. Аналогично, используя равенства, полученные приравниванием коэффициентов при $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots$, можно найти $\omega_2, \varkappa_2, \omega_3, \varkappa_3, \ldots$.

Заметим, что $\dim\mathcal{N}(F_v(0,1,0)) = 2$. Поэтому коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \ldots$ определяются неоднозначно.

Из утверждений 1, 2 и теоремы [28, теорема 2.2] вытекает утверждение 3 настоящей теоремы. $\square$

Литература

[1] Белан Е. П. О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-дифференциальном уравнении// Ученые записки ТНУ. Сер. мат. мех. информ. и киберн. 2002. Т. 2. С. 11–23.

[2] Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении// Дифф. уравн. 2004. Т. 40, № 5. С. 645–654.

[3] Варфоломеев Е. М. Нормальность некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов с конечным числом преобразований переменных// XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии: Тезисы докладов. Секции математики и информатики. РУДН, Москва, 2006. С. 16.

[4] Варфоломеев Е. М. Нормальность эллиптического функционально-дифференциального оператора с двумя преобразованиями переменных// Spectral and evolution problems. Труды 16-й Крымской осенней математической школы-симпозиума. 2006. Т. 16. С. 118–122.

[5] Варфоломеев Е. М. О бифуркации Андронова—Хопфа для параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями переменных в младших членах// Тезисы докладов Всеукраин-

ской научной конференции молодых ученых и студентов по дифференциальным уравнениям и их применениям, посвященной 100-летнему юбилею Я. Б. Лопатинского. ДонНУ, Донецк, 2006. С. 27-28.

[6] Варфоломеев Е. М. О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов второго порядка// Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 1. С. 173-174.

[7] Варфоломеев Е. М. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике// Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 21. С. 5–36.

[8] Власов В. В. О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Мат. сборник. 1995. Т. 186, № 8. С. 67–92.

[9] Власов В. В. О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева// Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 109–121.

[10] Воронцов М. А., Думаревский Ю. Д., Пруидзе Д. В., Шмальгаузен В. И. Автоволновые процессы в системах с оптической обратной связью// Изв. АН СССР. Физика. 1988. Т. 52, № 2. С. 374–376.

[11] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

[12] Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения// Теор. и матем. физ. 2004. Т. 140, № 1. С. 14–28.

[13] Лионс Ж. Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[14] Разгулин А. В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом// Журн. выч. мат. и мат. физ. 1993. Т. 33, № 1. С. 69–80.

[15] Разгулин А. В. О параболических функционально-дифференциальных уравнениях с управляемым преобразованием пространственных аргументов// Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 4. С. 448–451.

[16] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

[17] Селицкий А. М., Скубачевский А. Л. Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 1. С. 207–208.

[18] Скубачевский А. Л. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений// Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 1 (307). С. 169-170.

[19] Скубачевский А. Л. О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов// Функц. анализ и его прилож. 1997. Т. 31, № 4. С. 60–65.

[20] Скубачевский А. Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Дифф. уравн. 1998. Т. 34, № 10. С. 1394–1401.

[21] Скубачевский А. Л., Шамин Р. В. Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 1. С. 145–153.

[22] Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

[23] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

[24] Чушкин В. А., Разгулин А. В. Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отражением пространственного аргумента// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2003. Т. 2. С. 13–20.

[25] Шамин Р. В. О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Мат. сборник. 2003. Т. 194, № 9. С. 141–156.

[26] Agmon S. On the eigenvalues and on the eigenfunctions of general elliptic boundary value problems// Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. P. 119–147.

[27] Crandall M. G., Rabinowitz P. H. The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions// Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 67. P. 53–72.

[28] Da Prato G., Lunardi A. Hopf bifurcation for fully nonlinear equations in Banach space// Ann. Inst. Henri Poincare. 1986. V. 3. P. 315–329.

[29] Di Blasio G., Kunisch K., Sinestrari E. L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in the highest-order derivatives// J. Math. Anal. Appl.. 1984. V. 102, № 1. P. 38–57.

[30] Kunisch K., Shappacher W. Necessary conditions for partial differential equations with delay to generate C_0-semigroup// J. Differential Equations. 1983. V. 50, № 1. P. 49–79.

[31] Nakagiri S. Structural properties of functional differential equations in Banach spaces// Osaka J. Math. 1988. V. 85. P. 353–398.

[32] Pazi A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983.

[33] Razgulin A. V. Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback// Chaos in Optics. Proc. SPIE, ed. R. Roy. 1993. V. 2039. P. 342–352.

[34] Shamin R. V., Skubachevskii A. L. The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation// Funct. Differ. Equ. 2001. V. 8. P. 407–424.

[35] Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equation arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. 1998. V. 32, № 2. P. 261–278.

[36] Staffans O. Some well-posed functional equations which generate semigroups// J. Differential Equations. 1985. V. 58, № 2. P. 157–191.

[37] Varfolomeyev E. M. On the normality of some elliptic functional differential operators// The Fourth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Steklov Math. Institute, Moscow, 2005. P. 80-81.

[38] Varfolomeyev E. M. On the existence of orthonormal basis consisting of eigenfunctions of elliptic functional differential operators// Funct. Differ. Equ. 2006. V. 13, № 2. P. 267–304.

[39] Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., Abernathy R. L. Diffractive patterns in nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation// Chaos Solitons Fractals. 1994. V. 4. P. 1701–1716.

[40] Wu J. Semigroup and integral form of a class of partial differential equations with infinite delay// Differ. Integral Equ. Appl. 1991. V. 4, № 6. P. 1325–1351.