О бифуркации Андронова–Хопфа для квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных

Е. М. Варфоломеев

Нелинейная оптическая система с преобразованиями поля в двумерной обратной связи описывается следующей задачей Неймана [1]:

$$u_t + u = D\Delta u + K\biggl(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos u_{g_i}\biggr), \qquad x \in Q, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$(\partial u/\partial\widetilde{\nu})\big|_{\partial Q\times\mathbb{R}} = 0. \tag{2}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$; $D, K, \gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ – постоянные коэффициенты, не равные нулю; $u_{g_i} = u(g_i(x), t)$, $g_i \colon \overline{Q} \to g_i(\overline{Q})$ – взаимно однозначные преобразования, $i = 1, \dots, N$; ν – единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке x, $\widetilde{\nu} = (\nu, 0)$.

С точки зрения приложений представляет интерес изучение бифуркации Андронова–Хопфа периодических решений указанного уравнения. Во многих работах (см., например, [2], [3]) эта задача рассматривалась при условии, что область Q – окружность или круг с одним преобразованием переменных в виде вращения на постоянный угол и сжатия. Случай произвольных области Q и одного преобразования переменных изучался в работе [4]. В работе [5] использовалась нормальность линеаризованного оператора задачи. Нормальность такого оператора в случае двух преобразований переменных рассматривалась в работе [6].

В настоящей работе обобщены результаты работы [4] на случай конечного числа преобразований переменных. Для этого используются методы исследования бифуркации Андронова–Хопфа в бесконечномерных задачах, развитые в работах [7], [8].

Условие 1. $g_i(Q) \subseteq Q$, $g_i(x) \not\equiv x$ $(x \in Q)$, $i = 1, \dots, N$.

Условие 2. *Операторы* $G_i \colon L_p(Q) \to L_p(Q)$, $(G_i u)(x) = u(g_i(x))$, $i = 1, \dots, N$, *ограничены*.

Решение w задачи (1), (2) называется *пространственно-однородным стационарным решением*, если оно не зависит от $x \in Q$ и $t \in \mathbb{R}$. Оно удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$w = K\biggl(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos w\biggr). \tag{3}$$

Условие 3. $1 + \widehat{K} \sin \widehat{w} \sum_{i=0}^{N} \gamma_i \neq 0$, *где* $\widehat{w}$ *– решение уравнения* (3) *для* $K = \widehat{K}$.

Обозначим через $C^\sigma_{2\pi}(X)$ пространство всех σ-непрерывных по Гёльдеру 2π-периодических функций $\varphi \colon \mathbb{R} \to X$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C^\sigma_{2\pi}(X)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \sup_{0\leqslant s<t\leqslant 2\pi} \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_X/(t-s)^\sigma,$$

где X – вещественное банахово пространство, $0 < \sigma < 1$.

Пусть $C^{1,\sigma}_{2\pi}(X)$ – банахово пространство дифференцируемых функций $\varphi \colon \mathbb{R} \to X$ таких, что φ и φ' принадлежат $C^\sigma_{2\pi}(X)$ с нормой $\|\varphi\|_{C^{1,\sigma}_{2\pi}(X)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \|\varphi'\|_{C^\sigma_{2\pi}(X)}$.

Обозначим через $W^k_p(Q)$ $(\widetilde{W}^k_p(Q))$ пространство Соболева вещественнозначных (комплекснозначных) функций с обобщенными производными вплоть до порядка k

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-01-00256).

из $L_p(Q)$ ($\widetilde{L}_p(Q)$). Пусть $W^2_{p,N}(Q) = \{v \in W^2_p(Q) : (\partial v/\partial\nu)|_{\partial Q} = 0\}$, $\widetilde{W}^2_{p,N}(Q) = \{v \in \widetilde{W}^2_p(Q) : (\partial v/\partial\nu)|_{\partial Q} = 0\}$.

Положим $K = \widehat{K} + \varkappa$. Пусть $w = w(\varkappa)$ удовлетворяет уравнению (3) для $K = \widehat{K} + \varkappa$ и $w(0) = \widehat{w}$. Представим решение задачи (1), (2) в виде $u(x,t,\varkappa) = w(\varkappa) + v(x,t,\varkappa)$. Уравнение (1) примет вид

$$v_t = f(v,\varkappa),$$

где $f(v,\varkappa) = D\Delta v - v + (\widehat{K} + \varkappa)\sum_{i=1}^N \gamma_i\bigl(\cos(w(\varkappa) + v_{g_i}) - \cos w(\varkappa)\bigr)$.

Введем оператор $\mathscr{L}(\varkappa) : \mathscr{D}(\mathscr{L}(\varkappa)) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ с областью определения $\mathscr{D}(\mathscr{L}(\varkappa)) = W^2_{p,N}(Q)$ по формуле $\mathscr{L}(\varkappa)v = f_v(0,\varkappa)v = D\Delta v - v - (\widehat{K} + \varkappa)\sin w(\varkappa) \times \sum_{i=1}^N \gamma_i v_{g_i}$. Рассмотрим оператор $\widetilde{\mathscr{L}}(\varkappa) : \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}}(\varkappa)) \subset \widetilde{L}_p(Q) \to \widetilde{L}_p(Q)$ с областью определения $\mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}}(\varkappa)) = \widetilde{W}^2_{p,N}(Q)$, заданный по формуле $\widetilde{\mathscr{L}}(\varkappa) = \mathscr{L}(\varkappa)v_1 + i\mathscr{L}(\varkappa)v_2$, где $v_1, v_2 \in \mathscr{D}(\mathscr{L}(\varkappa))$, $v = v_1 + iv_2$.

Обозначим через $\lambda_s(\varkappa) = \delta_s(\varkappa) + i\omega_s(\varkappa)$, $s = 1,2,\dots$, собственные значения оператора $\widetilde{\mathscr{L}}(\varkappa)$.

Условие 4. $\lambda_1(0) = i\widehat{\omega}$ – *простое собственное значение оператора* $\widetilde{\mathscr{L}}(0) : \mathscr{D}(\widetilde{\mathscr{L}}(\varkappa)) \subset \widetilde{L}_p(Q) \to \widetilde{L}_p(Q)$, *причем* $\widehat{\omega} > 0$, $k\widehat{\omega}i \notin \sigma(\widetilde{\mathscr{L}}(0))$, $k = 0,2,3,\dots$, *и* $\delta_1'(0) \neq 0$.

Положим $\tau = \widehat{\omega}\omega(\varkappa)t$, где $\omega(\varkappa)$ – неизвестная частота, близкая к 1, и рассмотрим 2π-периодические решения уравнения

$$v_\tau = (\widehat{\omega}\omega(\varkappa))^{-1} f(v(\tau),\varkappa), \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1–4. *Зафиксируем* $\sigma \in (0,1)$ *и* $p > n/2$. *Тогда существуют* $\varepsilon_0 > 0$, *аналитическая вектор-функция* $\varepsilon \mapsto (v(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon))$ *из* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *в* $C^\sigma_{2\pi}(W^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(L_p(Q)) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *такая, что* $v(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$ *и* $v(\varepsilon)$ *не постоянна по* τ *при* $\varepsilon \neq 0$, *и аналитическая функция* $\varepsilon \mapsto w(\varkappa(\varepsilon))$ *из* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *в* $\mathbb{R}$.

Функция $u(x,t,\varepsilon) = w(\varkappa(\varepsilon)) + v(x,\tau,\varepsilon)$ *является* $2\pi(\widehat{\omega}\omega(\varepsilon))^{-1}$*-периодическим по* t *решением задачи* (1), (2), *где* $\tau = \omega(\varepsilon)\widehat{\omega}t$. *При этом* $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \cdots$, $\varkappa(\varepsilon) = \varepsilon^2\varkappa_2 + \varepsilon^3\varkappa_3 + \cdots$.

Более того, существует $\delta_0 > 0$ *такое, что если* $\overline{\varkappa}, \overline{\omega} \in \mathbb{R}$ *и* $\overline{v} \in C^\sigma_{2\pi}(W^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(L_p(Q))$ *удовлетворяют условиям*

$$\overline{v}'(\tau) = (\widehat{\omega}\overline{\omega})^{-1} f(\overline{v}(\tau), \overline{\varkappa}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

$$\|\overline{v}\|_{C^\sigma_{2\pi}(W^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(L_p(Q))} < \delta_0, \quad |\overline{\varkappa}| < \delta_0, \quad |1 - \overline{\omega}| < \delta_0,$$

то существуют $\theta \in [0, 2\pi)$ *и* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *такие, что* $\overline{\varkappa} = \varkappa(\varepsilon)$, $\overline{\omega} = \omega(\varepsilon)$, $\overline{v}(\tau) = v(x, \tau + \theta, \varepsilon)$.

Автор глубоко благодарен проф. А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[**1**] М. А. Воронцов, Ю. Д. Думаревский, Д. В. Пруидзе, В. И. Шмальгаузен, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **52**:2 (1988), 374–376. [**2**] Е. П. Белан, О. Б. Лыкова, *Дифференц. уравнения*, **40**:10 (2004), 1348–1357. [**3**] А. В. Разгулин, *ЖВМ и МФ*, **33**:1 (1993), 69–80. [**4**] А. Л. Скубачевский, *Дифференц. уравнения*, **34**:10 (1998), 1394–1401. [**5**] A. L. Skubachevskii, *Nonlinear Anal.*, **32**:2 (1998), 261–278. [**6**] Е. М. Варфоломеев, *УМН*, **61**:1 (2006), 173–174. [**7**] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **67**:1 (1977), 53–72. [**8**] G. Da Prato, A. Lunardi, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **3**:4 (1986), 315–329.

Е. М. Варфоломеев (E. M. Varfolomeev)
Российский университет дружбы народов
E-mail: varfolomeyev@mail.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
27.12.2006