МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

*На правах рукописи*

**Варфоломеев Евгений Михайлович**

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2007

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и математической физики факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук,<br>профессор А. Л. Скубачевский. |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор В. А. Треногин, |
| | кандидат физико-математических наук,<br>доцент А. В. Разгулин. |
| Ведущая организация: | Московский энергетический институт<br>(технический университет). |

Защита состоится "27" апреля 2007 г. в 14 часов 30 мин. на заседании диссертационного совета К.501.001.07 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП, Москва, Ленинские горы, МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, 2-й учебный корпус, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Автореферат разослан "___" __________ 2007 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент В. М. Говоров

## Актуальность темы

Параболические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие отклонения по переменной времени, рассматривались в работах G. Di Blasio, K. Kunisch и E. J. Sinestrari[1], K. Kunisch и W. J. Shappacher[2], S. Nakagiri[3], O. J. Staffans[4], J. Wu[5]. Наиболее общий случай таких уравнений с переменными запаздываниями в старших производных исследовался В. В. Власовым[6,7].

Краевые задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами по пространственным переменным изучались в работах А. Л. Скубачевского и Р. В. Шамина[8,9], Р. В. Шамина[10], А. Л. Скубачевского и А. М. Селицкого[11].

В настоящей диссертации рассматриваются параболические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие произвольные преобразования пространственных переменных. Такие задачи возникают в нелинейной оптике.

В нелинейных оптических системах с преобразованием поля в двумерной обратной связи возникают различные регулярные периодические явления, которые называют многолепестковыми волнами[12,13]. Эти явления могут использоваться для оптических методов передачи, обработки и хранения информации. Математической моделью некоторого класса таких оптических систем является вторая смешанная задача для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованием пространственных переменных:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = D\Delta u(x,t) + K\bigl(1+\gamma\cos(u(g(x),t))\bigr),\\ &\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\Big|_{\partial Q\times\mathbb{R}} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = u_0(x), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $x \in Q \subset \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, $u(x,t)$ — фазовая модуляция световой волны, $D > 0$, $K, \gamma$ — некоторые постоянные величины, $g$ — преобразование пространственных переменных, $\widetilde{\nu} = (\nu, 0)$, а $\nu$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial Q$. Возникновение многолепестковых волн происходит в результате бифуркации периодических решений задачи (1) в окрестности

[1]Di Blasio G., Kunisch K., Sinestrari E. J. Math. Anal. Appl.. 1984. V. 102, № 1. P. 38–57.

[2]Kunisch K., Shappacher W. J. Differential Equations. 1983. V. 50, № 1. P. 49–79.

[3]Nakagiri S. Osaka J. Math. 1988. V. 85. P. 353–398.

[4]Staffans O. J. Differential Equations. 1985. V. 58, № 2. P. 157–191.

[5]Wu J. Differ. Integral Equ. Appl. 1991. V. 4, № 6. P. 1325–1351.

[6]Власов В. В. Мат. сборник. 1995. Т. 186, № 8. С. 67–92.

[7]Власов В. В. Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 109–121.

[8]Скубачевский А. Л., Шамин Р. В. Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 1. С. 145–153.

[9]Shamin R. V., Skubachevskii A. L. Funct. Differ. Equ. 2001. V. 8. P. 407–424.

[10]Шамин Р. В. Мат. сборник. 2003. Т. 194, № 9. С. 141–156.

[11]Селицкий А. М., Скубачевский А. Л. Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 1. С. 207–208.

[12]Воронцов М. А., Думаревский Ю. Д., Пруидзе Д. В., Шмальгаузен В. И. Изв. АН СССР. Физика. 1988. Т. 52, № 2. С. 374–376.

[13]Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., Abernathy R. L. Chaos Solitons Fractals. 1994. V. 4. P. 1701–1716.

пространственно-однородного стационарного решения $w = \mathrm{const}$, определяемого соотношением $w = K(1 + \gamma \cos w)$.

Задача (1) изучалась в целом ряде работ. А. В. Разгулиным[14], а также А. Ю. Колесовым и Н. Х. Розовым[15] рассматривалась одномерная модель на окружности, в которой преобразование пространственных переменных $g$ являлось поворотом на некоторый угол. В. А. Чушкиным и А. В. Разгулиным[16] была решена задача на отрезке, где преобразование $g$ являлось отражением пространственной переменной относительно центра отрезка. А. В. Разгулиным[17] был исследован случай, когда пространственная область $Q$ — круг, а преобразование $g$ — поворот на некоторый постоянный угол. Е. П. Беланом[18] рассматривался случай, когда область $Q$ — круг, а преобразование $g$ является суперпозицией преобразований поворота и радиального сжатия. Случай произвольной области $Q$ с гладкой границей и невырожденного взаимно-однозначного преобразования $g \in C^3$ общего вида изучался А. Л. Скубачевским[19,20] в предположении, что линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор $L : \mathcal{D}(L) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ задачи (1) вида

$$(Lu)(x) = D(\Delta u)(x) - u(x) - K\gamma u(g(x)) \sin w$$

с областью определения $\mathcal{D}(L) = \{u \in W_2^2(Q) : (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$ является нормальным. Кроме того, А. Л. Скубачевским[21] были получены необходимые и достаточные условия нормальности таких операторов. Без предположения нормальности оператора $L$ для произвольной области $Q$ с гладкой границей и достаточно гладкого невырожденного взаимно-однозначного преобразования $g$ общего вида А. Л. Скубачевским[22] было доказано существование бифуркации периодических решений задачи (1) методами исследования бифуркации Андронова—Хопфа в бесконечномерном случае[23,24]. Е. П. Беланом[25] при таких же предположениях об операторе $L$, области $Q$ и преобразовании $g$ методом центральных многообразий были получены условия существования и устойчивости бифуркационных решений задачи (1), а также формулы для определения их топологических свойств. А. В. Разгулиным[26] была изучена задача управления преобразованием пространственных переменных $g$ в случае, когда $Q$ — произвольная область с гладкой границей, а преобразование $g$ задано в обобщенном виде с помощью некоторого функционала и, вообще говоря, не является обратимым.

[14] Разгулин А. В. Журн. выч. мат. и мат. физ. 1993. Т. 33, № 1. С. 69–80.

[15] Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Теор. и матем. физ. 2004. Т. 140, № 1. С. 14–28.

[16] Чушкин В. А., Разгулин А. В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2003. Т. 2. С. 13–20.

[17] Razgulin A. V. Chaos in Optics. Proc. SPIE, ed. R. Roy. 1993. V. 2039. P. 342–352.

[18] Белан Е. П. Дифф. уравн. 2004. Т. 40, № 5. С. 645–654.

[19] Скубачевский А. Л. Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 1 (307). С. 169-170.

[20] Skubachevskii A. L. Nonlinear Anal. 1998. V. 32, № 2. P. 261–278.

[21] Скубачевский А. Л. Функц. анализ и его прилож. 1997. Т. 31, № 4. С. 60–65.

[22] Скубачевский А. Л. Дифф. уравн. 1998. Т. 34, № 10. С. 1394–1401.

[23] Crandall M. G., Rabinowitz P. H. Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 67. P. 53–72.

[24] Da Prato G., Lunardi A. Ann. Inst. Henri Poincare. 1986. V. 3. P. 315–329.

[25] Белан Е. П. Ученые записки ТНУ. Сер. мат. мех. информ. и киберн. 2002. Т. 2. С. 11–23.

[26] Разгулин А. В. Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 4. С. 448–451.

## Цель работы

Целью диссертационной работы является: 1) обобщение задачи (1) на случай конечного числа произвольных преобразований пространственных переменных и получение условий бифуркации периодических решений такой задачи; 2) получение условий нормальности линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора такой задачи; 3) исследование разрешимости первой и второй смешанных задач для линейных параболических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих конечное число преобразований пространственных переменных.

## Новизна результатов

1. В диссертации впервые получены достаточные условия бифуркации периодических решений квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих конечное число произвольных преобразований пространственных переменных. Рассмотрены два случая: когда линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор задачи является нормальным, и когда нормальность указанного оператора не предполагается. Ранее такие задачи рассматривались только для случая одного преобразования пространственных переменных (см. сноски 14–20, 22–26).

2. Получены необходимые и достаточные условия нормальности линейных эллиптических функционально-дифференциальных операторов, содержащих конечное число произвольных преобразований пространственных переменных. Известные ранее результаты касались случая одного преобразования пространственных переменных (см. сноску 21).

3. Доказаны существование и единственность обобщенных решений первой и второй смешанных задач для линейных параболических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих конечное число преобразований пространственных переменных. Предполагается, что эллиптический функционально-дифференциальный оператор, входящий в состав уравнений, является нормальным. Указан конструктивный способ построения решений методом Фурье.

Во всех случаях преобразования пространственных переменных предполагаются достаточно гладкими, невырожденными и взаимно-однозначными.

## Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы (40 наименований). Общий объем диссертации — 119 страниц.

В первой главе изучается нормальность линейных эллиптических функционально-дифференциальных операторов, содержащих конечное число произвольных преобразований пространственных переменных. Доказывается, что при некоторых условиях оператор указанного типа является нормальным тогда и только тогда, когда преобразования пространственных переменных являются коммутирующими ортогональными преобразованиями. Для всех введенных условий строятся контрпримеры, показывающие их существенность.

Во второй главе исследуется разрешимость первой и второй смешанных задач для линейных параболических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих конечное число преобразований пространственных переменных. Эллиптический функционально-дифференциальный оператор, входящий в уравнение, предполагается нормальным, что эквивалентно существованию базиса из собственных функций такого оператора. Используются условия нормальности линейных эллиптических функционально-дифференциальных операторов, полученные в первой главе, согласно которым преобразования пространственных переменных должны принадлежать некоторому классу преобразований. Методом Фурье доказывается существование обобщенных решений в анизотропных пространствах Соболева. Доказывается единственность обобщенных решений.

Третья глава посвящена изучению бифуркации периодических решений квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих конечное число преобразований пространственных переменных. Рассматриваются два случая. В первом случае преобразования пространственных переменных предполагаются принадлежащими классу преобразований, соответствующему условиям нормальности линеаризованного функционально-дифференциального оператора задачи (используются результаты, полученные в первой главе). С помощью метода Фурье и теоремы о неявном операторе доказывается существование периодических решений, бифурцирующих из стационарного решения. Во втором случае предполагаются лишь ограниченность операторов, содержащих преобразования пространственных переменных. Методами исследования бифуркации Андронова—Хопфа в бесконечномерном случае (см. сноски 23, 24) доказывается существование бифуркационных решений в пространствах Гельдера.

## Содержание диссертации

### Глава 1. Нормальность линейных эллиптических функционально-дифференциальных операторов

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geqslant 2$. Обозначим $g_i$, $i = 1, \ldots, N$, $N \geqslant 2$, взаимно-однозначные преобразования класса $C^3$, такие что

$$g_i : V \subset \mathbb{R}^n \to g_i(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad |J_{g_i}(x)| \neq 0, \quad x \in V,$$

где $V$ — ограниченная область, $\overline{Q} \subset V$, $J_{g_i}(x) = [\partial g_{i_p}/\partial x_q]_{p,q=1}^n$ — матрица Якоби преобразования $g_i$, $|J_{g_i}(x)| = |\det J_{g_i}(x)|$, $i = 1, \ldots, N$. Будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$g_i(Q) \subseteq Q, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Введем неограниченный оператор

$$A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q), \qquad A_0 v = \Delta v$$

с областью определения $\mathcal{D}(A_0) = \{v \in W_2^2(Q) : Bv = 0\}$. Здесь $W_2^k(Q)$ обозначает пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе со всеми обобщенными производными вплоть до порядка $k$ включительно, оператор $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v/\partial \nu)|_{\partial Q}$ задает краевые условия, а $\nu$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial Q$ в точке $x \in \partial Q$. Как известно, оператор $A_0$ — самосопряженный.

Рассмотрим оператор

$$A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(Q) \to L_2(Q), \qquad A = A_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i,$$

где $A_i$, $i = 1, \ldots, N$ — ограниченные линейные операторы преобразования переменных, определенные на всем пространстве $L_2(Q)$ по формуле

$$A_i : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad A_i v(x) = a_i v(g_i(x)),$$

где $a_i \neq 0$ — вещественные числа, $i = 1, \ldots, N$.

Положим $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0)$.

Неограниченный оператор $T$ называется *нормальным*, если он замкнут, определен на плотном множестве, $\mathcal{D}(TT^*) = \mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}$ и $TT^*v = T^*Tv$ для всех $v \in \mathcal{D}$.

Введем множества $G_{g_i}^m = \{x \in Q : g_i^m(x) \neq x\}$, $m = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, N$. Здесь $g_i^m(x)$ обозначает преобразование $g_i$, примененное $m$ раз. Будем записывать суперпозицию преобразований в виде $g_i g_j(x)$, $g_i^{-1} g_j(x)$ и т. д.

Введем несколько условий, которые будут использоваться при формулировке теорем. Пусть $0 \leqslant M \leqslant N$.

**Условие 1.1.** $\sum\limits_{i \in \mathcal{K}} a_i \neq 0$ *для любого подмножества* $\mathcal{K} \subseteq \{1, \ldots, M\}$, $\mathcal{K} \neq \varnothing$.

**Условие 1.2.** $g_i(x) \neq g_j^{-1}(x)$ *для п. в.* $x \in Q$ *и всех* $i, j = 1, \ldots, N$, $i \neq j$.

**Условие 1.3.** $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant M \\ 1 \leqslant j \leqslant N \\ i < j}} \alpha_{ij}\, a_i a_j \neq 0$ *для любых* $\alpha_{ij} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, *не равных одновременно нулю.*

Справедливы следующие теоремы (см. § 1.2).

**Теорема 1.1.** *Пусть* $G_{g_i}^2 \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \ldots, N$.

1. *Если оператор $A$ — нормальный и выполнены условия* 1.1 *и* 1.2 *при* $M = N$, *то*

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.1}$$

*где $K_i$ — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Если выполнено свойство* (1.1) *и*

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i, j = 1, \ldots, N, \tag{1.2}$$

*то оператор $A$ — нормальный.*

3. *Если выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3 *при* $M = N$, *то оператор* $A$ *является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства* (1.1) *и* (1.2).

**Теорема 1.2.** *Пусть* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = 1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, *и справедливы следующие утверждения.*

1. *Если оператор* $A$ — *нормальный и выполнено хотя бы одно из условий* 1.1, 1.2 *при* $M = N$, *то*
$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.3}$$
*а оператор* $A$ *является самосопряженным.*

2. *Если выполнено свойство* (1.3), *то оператор* $A$ — *самосопряженный.*

**Теорема 1.3.** *Пусть* $G^2_{g_i} \neq \varnothing$ *и* $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, M$, *а также* $G^2_{g_i} = \varnothing$, $i = M+1, \dots, N$. *Тогда* $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$, *и справедливы следующие утверждения.*

1. *Если оператор* $A$ — *нормальный и выполнены условия* 1.1 *и* 1.2, *то*
$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \tag{1.4}$$
$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = M+1, \dots, N, \tag{1.5}$$
*где* $K_i$ — *ортогональные матрицы размера* $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.

2. *Если выполнены свойства* (1.4) *и* (1.5), *а также*
$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, \tag{1.6}$$
*то оператор* $A$ — *нормальный.*

3. *Если выполнены условия* 1.1, 1.2 *и* 1.3, *то оператор* $A$ *является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства* (1.4)–(1.6).

Результаты теорем 1.1–1.3 обсуждаются в § 1.3: полученные результаты сравниваются с известными ранее для случая одного преобразования переменных (см. сноску 21); приводятся примеры преобразований вида (1.5); доказываются некоторые конструктивные условия, достаточные для выполнения условия 1.3. Существенность используемых условий обоснована примерами 1.4, 1.6, 1.8 и 1.9 (см. §§ 1.5, 1.7).

## Глава 2. Смешанные задачи для линейных параболических функционально-дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейное параболическое функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x), t) + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T \tag{2.1}$$

с краевыми условиями первого либо второго рода

$$u\big|_{\Gamma_T} = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\bigg|_{\Gamma_T} = 0 \tag{2.3}$$

и начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q. \tag{2.4}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\partial Q \in C^\infty$, $\Omega_T = Q \times [0,T]$, $\Gamma_T = \partial Q \times [0,T]$, $\widetilde{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к $\Gamma_T$, $a_1,\dots,a_N \in \mathbb{R}$, $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$, а $g_1,\dots,g_N$ — некоторые преобразования переменных. Будем также использовать обозначение $Q_t = Q \times \{t\}$, так что $Q_0 = Q$.

Будем предполагать, что неограниченный линейный оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$, действующий по формуле

$$(Au)(x) = \Delta u(x) + \sum_{i=1}^{N} a_i u(g_i(x)),$$

является нормальным. (Здесь оператор $Bu = u\big|_{\partial Q}$ или $Bu = (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q}$ задает краевые условия первого или второго рода.)

**Условие 2.1.** *Преобразования $g_1,\dots,g_N$ взаимно-однозначны, принадлежат классу гладкости $C^3$, имеет место $g_i(Q) = Q$, $|J_{g_i}(x)| \neq 0$ $(x \in \overline{Q})$, $i = 1,\dots,N$, а также*

$$G_{g_i}^2 \neq \varnothing, \quad i = 1,\dots,M,$$
$$G_{g_i}^2 = \varnothing, \quad i = M+1,\dots,N.$$

(См. определения $|J_{g_i}(x)|$ и $G_{g_i}^m$ в главе 1.)

**Условие 2.2.** *Преобразования $g_1,\dots,g_N$ при всех $x \in Q$ удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} &g_i(x) = K_i x + b_i, && i = 1,\dots,M, \\ &|J_{g_i}(x)| = 1, && i = M+1,\dots,N, \\ &g_i g_j(x) = g_j g_i(x), && i = 1,\dots,M, \quad j = 1,\dots,N, \end{aligned}$$

*где $K_i$ — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.*

Применяя теорему 1.3, получим следующие результаты.

**Теорема 2.1.**

1. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.2. *Тогда оператор $A$ — нормальный.*

2. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 1.1–1.3. *Тогда условие* 2.2 *эквивалентно нормальности оператора $A$.*

Будем считать, что условия 2.1 и 2.2 выполнены, следовательно, оператор $A$ является нормальным.

Через $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ обозначим замыкание в $W_2^1(Q)$ множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$.

**Определение 2.1.** Не равная тождественно нулю функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ $(u \in W_2^1(Q))$ называется *обобщенной собственной функцией* оператора $A$ с краевыми условиями $Bu = u\big|_{\partial Q} = 0$ $(Bu = (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0)$, соответствующей *собственному значению* $\lambda \in \mathbb{C}$, если для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ $(v \in W_2^1(Q))$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q \left( \nabla u \overline{\nabla v} - \sum_{i=1}^N a_i u(g_i(x)) \overline{v} \right) dx = -\lambda \int\limits_Q u \overline{v}\, dx.$$

Далее под *собственными функциями* будем понимать обобщенные собственные функции. Справедлив следующий результат.

**Теорема 2.2.** *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.2. *Тогда в* $L_2(Q)$ *существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций оператора* $A$.

Введем анизотропное пространство Соболева $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ функций, принадлежащих $L_2(\Omega_T)$ вместе со своими обобщенными производными первого порядка по переменным $x_1, \dots, x_N$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \int\limits_{\Omega_T} (\nabla u \overline{\nabla v} + u \overline{v})\, dxdt = \int\limits_0^T (u, v)_{W_2^1(Q_t)} dt.$$

Введем также следующие подпространства:

$$\begin{aligned} W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T) &= \{u \in W_2^{1,0}(\Omega_T) : u\big|_{\Gamma_T} = 0\}, \\ \widehat{W}_2^1(\Omega_T) &= \{u \in W_2^1(\Omega_T) : u\big|_{Q_T} = 0\}, \\ \widehat{W}_{2,D}^1(\Omega_T) &= \{u \in W_2^1(\Omega_T) : u\big|_{\Gamma_T} = 0,\ u\big|_{Q_T} = 0\}. \end{aligned}$$

**Определение 2.2.** Назовем функцию $u \in W_{2,D}^{1,0}(\Omega_T)$ $(u \in W_2^{1,0}(\Omega_T))$ *обобщенным решением* задачи (2.1), (2.2), (2.4) (задачи (2.1), (2.3), (2.4)), если для любой функции $v \in \widehat{W}_{2,D}^1(\Omega_T)$ $(v \in \widehat{W}_2^1(\Omega_T))$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega_T} \left( \nabla u \overline{\nabla v} - u \overline{v}_t - \sum_{i=1}^N a_i u(g_i(x), t) \overline{v} \right) dxdt = \int\limits_{Q_0} \varphi \overline{v}\big|_{t=0} dx + \int\limits_{\Omega_T} f \overline{v}\, dxdt.$$

В §§ 2.4, 2.5 получен следующий результат о разрешимости задач (2.1), (2.2), (2.4) и (2.1), (2.3), (2.4).

**Теорема 2.3.** *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.2. *Тогда для любых* $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in W^{1,0}_{2,D}(\Omega_T)$ $(u \in W^{1,0}_2(\Omega_T))$ *задачи* (2.1), (2.2), (2.4) (*задачи* (2.1), (2.3), (2.4)), *которое представляется в виде ряда*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k(x),$$

*где*

$$u_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau,$$

$$f_k(t) = \int_{\Omega_T} f(x,t)\overline{e_k(x)}\, dx, \quad \varphi_k = \int_Q \varphi(x)\overline{e_k(x)}\, dx,$$

*а* $e_k$, $\lambda_k$ — *собственные функции и собственные значения оператора* $A$ *с краевыми условиями* $Bu = u\big|_{\partial Q} = 0$ $(Bu = (\partial u/\partial\nu)\big|_{\partial Q} = 0)$.

*Ряд сходится в* $W^{1,0}_2(\Omega_T)$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^{1,0}_2(\Omega_T)} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{L_2(Q)} + \|f\|_{L_2(\Omega_T)}\right).$$

## Глава 3. Бифуркация периодических решений квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений

**1.** Рассмотрим квазилинейное параболическое функционально-дифференциальное уравнение с конечным числом преобразований переменных в младших членах:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = D\Delta u(x,t) + K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos(u(g_i(x),t))\Big). \tag{3.1}$$

Здесь $x \in Q$, $t \in \mathbb{R}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$; $D > 0$, $K, \gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ — постоянные коэффициенты, не равные нулю; $g_i : V \to g_i(V)$ — взаимно-однозначные преобразования, $V \in \mathbb{R}^n$, $\overline{Q} \subset V$.

Уравнение (3.1) рассматривается с краевыми условиями Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\bigg|_{\partial Q \times \mathbb{R}} = 0, \tag{3.2}$$

где $\widetilde{\nu} = (\nu, 0)$, а $\nu$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial Q$ в точке $x$.

**Условие 3.1.** $g_i(Q) \subseteq Q$, $g_i(x) \not\equiv x$ $(x \in Q)$, $i = 1, \ldots, N$.

**Условие 3.2.** *Операторы* $G_i : L_p(Q) \to L_p(Q)$, $(G_i u)(x) = u(g_i(x))$, $i = 1, \ldots, N$, *ограничены.*

Решение $w$ задачи (3.1), (3.2) называется *пространственно-однородным стационарным решением*, если оно не зависит от $x \in Q$ и $t \in \mathbb{R}$. Оно удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$w = K\Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cos w\Big). \tag{3.3}$$

**Условие 3.3.** $1 + \widehat{K} \sin \widehat{w} \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i \neq 0$, *где* $\widehat{w}$ — *решение уравнения* (3.3) *для* $K = \widehat{K}$.

Будем рассматривать $K$ как бифуркационный параметр. Положим $K = \widehat{K} + \varkappa$. Пусть $w = w(\varkappa)$ удовлетворяет уравнению (3.3) для $K = \widehat{K} + \varkappa$ и $w(0) = \widehat{w}$. Представим решение задачи (3.1), (3.2) в виде $u(x,t,\varkappa) = w(\varkappa) + v(x,t,\varkappa)$. Уравнение (3.1) примет вид

$$v_t = f(v, \varkappa),$$

где $f(v,\varkappa) = D\Delta v - v + (\widehat{K} + \varkappa) \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i \big(\cos(w(\varkappa) + v_{g_i}) - \cos w(\varkappa)\big)$.

Очевидно, $f_v(0,\varkappa)v = D\Delta v - v - (\widehat{K} + \varkappa) \sin w(\varkappa) \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i v_{g_i}$.

Введем оператор $\Lambda(\varkappa) : \mathcal{D}(\Lambda(\varkappa)) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda(\varkappa)) = \{v \in W_p^2(Q) : (\partial v/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$ по формуле $\Lambda(\varkappa) = f_v(0,\varkappa)$. Обозначим $\Lambda_0 = \Lambda(0)$. Ясно, что

$$\Lambda_0 v = D\Delta v - v - \widehat{K} \sin \widehat{w} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i v_{g_i}.$$

Обозначим через $\lambda_s(\varkappa) = \delta_s(\varkappa) + i\omega_s(\varkappa)$, $s = 1, 2, \ldots$, собственные значения оператора $\Lambda(\varkappa)$.

**Условие 3.4.** *При* $\varkappa = 0$ *существуют в точности два простых чисто мнимых комплексно сопряженных собственных значения* $\lambda_1(0) = i\widehat{\omega}$, $\lambda_2(0) = -i\widehat{\omega}$ *оператора* $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_p(Q) \to L_p(Q)$, *так что* $\delta_1(0) = \delta_2(0) = 0$, $\omega_1(0) = -\omega_2(0) = \widehat{\omega}$. *При этом выполнено* $\widehat{\omega} > 0$ *и*

$$\delta_1'(0) = \frac{\partial \delta_1(\varkappa)}{\partial \varkappa}\bigg|_{\varkappa=0} \neq 0.$$

**2.** Будем предполагать, что линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda_0) = \{u \in W_2^2(Q) : (\partial u/\partial \nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$ является нормальным. Поскольку нормальность оператора $\Lambda_0$ эквивалентна нормальности оператора $\Lambda_0 + I$, применим теорему 1.3 совместно с условиями 2.1 и 2.2 и получим следующие результаты.

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.2. *Тогда оператор* $\Lambda_0$ — *нормальный.*

Условия 2.1 и 2.2 определяют класс допустимых преобразований $g_1, \ldots, g_N$ в задаче (3.1), (3.2) в предположении, что оператор $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ нормальный. Очевидно, такие преобразования будут удовлетворять также условиям 3.1, 3.2.

Пусть $\Omega_T = Q \times (0, T)$. Обозначим через $W_2^{2,1}(\Omega_T)$ пространство функций из $L_2(\Omega_T)$, таких что все их обобщенные производные вплоть до второго порядка по $x$ и первая обобщенная производная по $t$ принадлежат пространству $L_2(\Omega_T)$. Это банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(\Omega_T)} = \left\{ \int\limits_{\Omega_T} \left( \sum_{|\alpha| \leqslant 2} |\mathcal{D}_x^\alpha u|^2 + |\mathcal{D}_t u|^2 \right) dxdt \right\}^{1/2}.$$

Введем подпространство

$$W_{2,N}^{2,1}(\Omega_{2\pi}) = \left\{ u \in W_2^{2,1}(\Omega_{2\pi}) : \frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\Big|_{\Gamma_{2\pi}} = 0,\ u\big|_{t=0} = u\big|_{t=2\pi} \right\}.$$

Введем новую переменную времени $\tau = \omega \widehat{\omega} t$, где $\omega = \omega(\varkappa)$ — неизвестная частота.

В § 3.4 доказана следующая теорема.

**Теорема 3.2.** *Пусть выполнены условия* 3.3, 2.1, 2.2, 3.4. *Тогда для некоторого* $\varepsilon_0 > 0$ *существует непрерывная вектор-функция* $\varepsilon \mapsto (v(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon))$ *из* $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ *в* $W_{2,N}^{2,1}(\Omega_{2\pi}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Эта функция аналитическая на интервале* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *и удовлетворяет условиям*

$$v(0) = 0, \quad \omega(0) = 1, \quad \varkappa(0) = 0.$$

*Функция* $u(x, t, \varepsilon) = w(\varkappa(\varepsilon)) + v(x, \tau, \varepsilon)$ *является* $2\pi(\widehat{\omega}\omega(\varepsilon))^{-1}$*-периодическим по* $t$ *решением задачи* (3.1), (3.2), *где* $\tau = \omega(\varepsilon)\widehat{\omega} t$.

**3.** Откажемся от предположения нормальности оператора $\Lambda_0 : \mathcal{D}(\Lambda_0) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$. Будем предполагать, что преобразования $g_1, \ldots, g_N$ в задаче (3.1), (3.2) удовлетворяют лишь условиям 3.1, 3.2.

Обозначим через $C_{2\pi}^\sigma(X)$ пространство всех $\sigma$-непрерывных по Гельдеру $2\pi$-периодических функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C_{2\pi}^\sigma(X)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant 2\pi} \frac{\|\varphi(t) - \varphi(s)\|_X}{(t-s)^\sigma},$$

где $X$ — вещественное банахово пространство, $0 < \sigma < 1$.

Пусть $C_{2\pi}^{1,\sigma}(X)$ — пространство дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$, таких что $\varphi$ и $\varphi'$ принадлежат $C_{2\pi}^\sigma(X)$. Это банахово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{C_{2\pi}^{1,\sigma}(X)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \|\varphi'\|_{C_{2\pi}^\sigma(X)}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}_p(Q)$ пространство Лебега вещественнозначных функций, абсолютно интегрируемых в области $Q$ с показателем $p$, а через $\mathcal{W}_p^k(Q)$ — пространство Соболева вещественнозначных функций, принадлежащих $\mathcal{L}_p(Q)$ вместе со своими обобщенными производными вплоть до порядка $k$. Введем подпространство $\mathcal{W}^2_{p,N}(Q) = \{v \in \mathcal{W}^2_p(Q) : (\partial v/\partial\nu)\big|_{\partial Q} = 0\}$.

Положим $\tau = \widehat{\omega}\omega(\varkappa)t$, где $\omega(\varkappa)$ — неизвестная частота.

В § 3.5 получена следующая теорема.

**Теорема 3.3.** *Пусть выполняются условия* 3.1, 3.2, 3.3, 3.4. *Зафиксируем* $\sigma \in (0,1)$ *и* $p > n/2$.

*Тогда существуют* $\varepsilon_0 > 0$ *и аналитическая вектор-функция* $\varepsilon \mapsto (v(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \varkappa(\varepsilon))$ *из* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *в* $C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q)) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *такая что* $v(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\varkappa(0) = 0$ *и* $v(\varepsilon)$ *не постоянна по* $\tau$ *при* $\varepsilon \neq 0$.

*Функция* $u(x,t,\varepsilon) = w(\varkappa(\varepsilon)) + v(x,\tau,\varepsilon)$ *является* $2\pi(\widehat{\omega}\omega(\varepsilon))^{-1}$*-периодическим по* $t$ *решением задачи* (3.1), (3.2), *где* $\tau = \omega(\varepsilon)\widehat{\omega}t$. *При этом* $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots$, $\varkappa(\varepsilon) = \varepsilon^2\varkappa_2 + \varepsilon^3\varkappa_3 + \dots$.

*Более того, существует* $\delta_0 > 0$, *такое что если* $\overline{\varkappa}, \overline{\omega} \in \mathbb{R}$ *и* $\overline{v} \in C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))$ *удовлетворяют условиям*

$$\overline{v}_\tau = (\widehat{\omega}\overline{\omega})^{-1} f(\overline{v}, \overline{\varkappa}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$
$$\|\overline{v}\|_{C^\sigma_{2\pi}(\mathcal{W}^2_{p,N}(Q)) \cap C^{1,\sigma}_{2\pi}(\mathcal{L}_p(Q))} < \delta_0, \quad |\overline{\varkappa}| < \delta_0, \quad |1 - \overline{\omega}| < \delta_0,$$

*то существуют* $\theta \in [0, 2\pi)$ *и* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, *такие что* $\overline{\varkappa} = \varkappa(\varepsilon)$, $\overline{\omega} = \omega(\varepsilon)$, $\overline{v}(x,\tau) = v(x, \tau + \theta, \varepsilon)$.

## Апробация

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинаре кафедры общей математики факультета ВМиК МГУ под руководством академика Е. И. Моисеева; на семинаре механико-математического факультета МГУ под руководством проф. А. Г. Костюченко, проф. В. В. Власова и проф. К. А. Мирзоева; на семинаре кафедры математического моделирования МЭИ (ТУ) под руководством проф. Ю. А. Дубинского и проф. А. А. Амосова; на семинаре кафедры прикладной математики–1 МИИТ под руководством проф. А. Д. Мышкиса; на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и математической физики РУДН под руководством проф. А. Л. Скубачевского.

Результаты диссертации докладывались также на 4-й Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, 2005; Крымских осенних математических школах-симпозиумах, Симферополь, 2004, 2005, 2006; XLII Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии, Москва, 2006; Всеукраинской научной конференции молодых ученых и студентов по дифференциальным уравнениям и их применениям, посвященной 100-летнему юбилею Я. Б. Лопатинского, Донецк, 2006.

## Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах, библиографическое описание которых дается ниже.

## Литература


1. Варфоломеев Е. М. Нормальность некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов с конечным числом преобразований переменных// XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии: Тезисы докладов. Секции математики и информатики. РУДН, Москва, 2006. С. 16.

2. Варфоломеев Е. М. Нормальность эллиптического функционально-дифференциального оператора с двумя преобразованиями переменных// Spectral and evolution problems. Труды 16-й Крымской осенней математической школы-симпозиума. 2006. Т. 16. С. 118–122.

3. Варфоломеев Е. М. О бифуркации Андронова—Хопфа для параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями переменных в младших членах// Тезисы докладов Всеукраинской научной конференции молодых ученых и студентов по дифференциальным уравнениям и их применениям, посвященной 100-летнему юбилею Я. Б. Лопатинского. ДонНУ, Донецк, 2006. С. 27-28.

4. Варфоломеев Е. М. О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов второго порядка// Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 1. С. 173-174.

5. Варфоломеев Е. М. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике// Современная математика. Фундаментальные направления. 2007, февраль. Т. 21. С. 5–36.

6. Varfolomeyev E. M. On the normality of some elliptic functional differential operators// The Fourth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Steklov Math. Institute, Moscow, 2005. P. 80-81.

7. Varfolomeyev E. M. On the existence of orthonormal basis consisting of eigenfunctions of elliptic functional differential operators// Funct. Differ. Equ. 2006. V. 13, № 2. P. 267–304.